Activités du chapitre n° 10
Géométrie repérée

Table des matières

1 Exercices méthodologiques 1

2 Approfondissement 3

3 Travaux pratiques 5

1 Exercices méthodologiques

Pour les exercices de ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère cartésien $\left(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

Savoir-faire n° 1: Utiliser la condition de colinéarité

1. On considère quatre points $A(1\,;4)$, $B(3\,;-2)$, $C(-1\,;-2)$ et $D(-2\,;1)$.
   Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. On considère trois points $E(6\,;-1)$, $F(0\,;1)$ et $G(-3\,;2)$.
   Les trois points E, F et G sont-ils alignés ?

⋆ **S'entrainer sur le livre :** n° 23 à 30 page 214

Savoir-faire n° 2: Utiliser une équation cartésienne de droite

1. **Obtenir des informations**

   On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x-3y+5=0$.

   (a) Le point $A(5\,;4)$ appartient-il à D ?

   (b) Trouver le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse -2.

   (c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec les axes du repère.

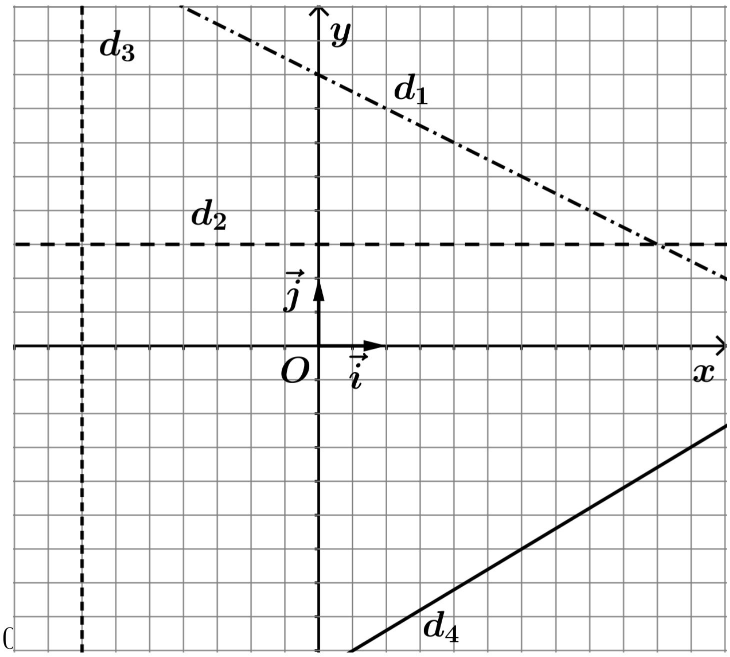
   (d) Déterminer un vecteur directeur, puis le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.

   (e) Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

2. **Construire une droite**

   Représenter les droites suivantes :

D_1 : $3x-y+1=0$	D_2 : $2x-1=0$
D_3 : $-x+y-3=0$	D_4 : $-2x+y=0$



⋆ **S'entrainer sur le livre :** exercice corrigé page 207

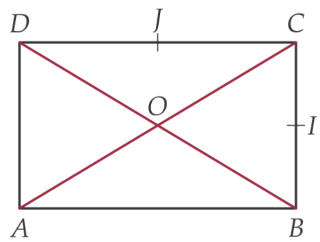
Savoir-faire n° 3: Déterminer une équation cartésienne de droite

1. **Par lectures graphiques (figure de l'exo méthodo n° 2)**
   Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.
2. **Droite donnée par un point et un vecteur directeur**
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A\big(2\,;\,-1\big)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. Déterminer l'équation réduite de (d).
3. **Droite donnée par 2 points**
   (a) Soit le point $B\big(5\,;\,7\big)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
   (b) Déterminer l'équation réduite de (AB).
4. **Droite parallèle à une autre**
   (a) Donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par le point A et parallèle à la droite Δ' dont une équation cartésienne est $3x - y + 12 = 0$.
   (b) La droite Δ est-elle parallèle à la droite Δ'' dont l'équation réduite est $y = 3x + 14$?

⋆ **S'entrainer sur le livre :** Exercice corrigé page 205, n° 68 à 83 page 219

Savoir-faire n° 4: Décomposer des vecteurs dans une base

$ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et O est le centre du rectangle.



1. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. 2. Écrire les mêmes vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

⋆ **S'entrainer sur le livre :** n° 41 à 49 page 217

Savoir-faire n° 5: Démontrer en utilisant des décompositions de vecteurs

1. Construire un parallélogramme $ABCD$ puis les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$. (b) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Démontrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

⋆ **S'entrainer sur le livre :** Exercice corrigé page 203, n° 13 page 209, n° 34 à 40 page 215

2 Approfondissement

Exercice n° 1 Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

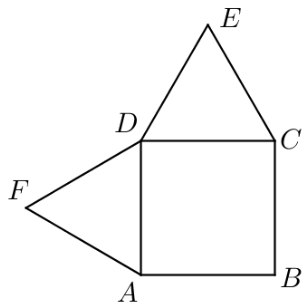
1. Tracer la droite d d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + 2$.
   Préciser son coefficient directeur et donner un des ses vecteurs directeurs $\vec{u}$.
2. Vérifier que les points $A(3\,;\,4)$ et $B(-3\,;\,0)$ sont des points de d.
3. Construire la droite Δ passant par le point $D(2\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$.
4. Démontrer que les droites d et Δ sont parallèles.
5. (a) Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AD]$.
   (b) Construire le symétrique E du point B par rapport à I et déterminer ses coordonnées.
   (c) Démontrer que les droites (BD) et (AE) sont parallèles.

Exercice n° 2: Intersection de droites On se place dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $3x + 2y = 4$ et $x + 3y = 1$.
Justifier que ces droites sont sécantes puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice n° 3: Résolutions de systèmes d'équations
Déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants, puis les résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & -7 \\ -5x-2y & = & 8 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} 3x-2y & = & -1 \\ -6x+4y & = & 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & 8 \\ 5x+2y & = & 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} 7x-2y & = & -1 \\ -14x+4y & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exercice n° 4
$ABCD$ est un carré, et DCE et DAF sont des triangles équilatéraux .



1. Justifier que $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.
2. Déterminer les coordonnées des points C, E, F dans ce repère.
3. Démontrer que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

Exercice n° 5: Deux méthodes pour démontrer un alignement

Dans un triangle ABC, on considère les points D, E et F définis par :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

On souhaite montrer, par deux méthodes différentes, que les points D, E et F sont alignés.

Partie A : En décomposant les vecteurs

1. Tracer un triangle ABC et y placer les points D, E et F.
2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Partie B : Avec un repère

1. Justifier que $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
2. Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans ce repère.
3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice n° 6

On considère un triangle équilatéral ABC.

1. On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$. Déterminer les coordonnées des points suivants :
   - les points A, B, et C
   - le point E tel que le quadrilatère $ABEC$ est un parallélogramme
   - les points M et N tels que $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{NA} + 4\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{NE} = \vec{0}$.
2. Montrer les relations suivantes : $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. En déduire que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. **Applications**
   (a) Calculer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.
   (b) Montrer que les points M, N et P sont alignés.
   (c) Montrer que le quadrilatère $MBEP$ est un parallélogramme.

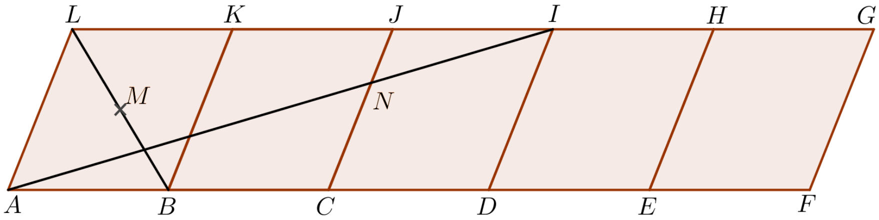
Exercice n° 7: Choisir la bonne décomposition

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.
En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points A, E et D sont alignés.

Exercice n° 8: Une bande de parallélogrammes

Sur les 5 parallélogrammes accolés ci-contre, on a construit :

- M le milieu de $[LB]$
- N le point d'intersection des droites (AI) et (JC).



1. Déterminer les coordonnées du point N dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AL}\right)$.
2. Démontrer que les points M, N et G sont alignés.

Problème ouvert
Dans un repère orthonormé, soit $A(10\,;0)$, $B(10\,;10)$ et $C(0\,;10)$.
Déterminer l'ensemble des points à coordonnées entières sur la droite d d'équation $2x-3y+3=0$ situés à l'intérieur du carré $OABC$.

3 Travaux pratiques

TP : Une histoire de mobile

Bob a fabriqué un mobile à installer au-dessus du lit de sa fille.

Celui-ci est constitué d'une tige de métal de $40\,\text{cm}$, matérialisée par le segment $[AB]$, sur laquelle pendent un triangle et un disque à chaque extrémité.
Le triangle pèse 1 décagramme et le disque pèse 3 décagrammes.

Partie A : Comment accrocher le mobile ?

1. Voulant installer le mobile à un fil attaché au plafond, Bob accroche le fil au milieu de la tige.
   Le mobile est-il d'aplomb ? Si non, de quel côté penche-t-il ?
2. Bob se renseigne alors auprès d'un ami professeur de Physique qui lui explique qu'il faut accrocher le mobile en un point G tel que $m_1\overrightarrow{GA}+m_2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, où m_1 et m_2 sont les masses respectives du triangle et du disque.
   (a) Écrire l'égalité vectorielle précédente en remplaçant m_1 et m_2 par leur valeur en décagramme.
   (b) Justifier que G appartient à (AB). Montrer que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
   (c) Tracer le segment $[AB]$ à l'échelle $1:10$ et y placer le point G.
3. Reprendre les questions précédentes en prenant les masses m_1 et m_2 en grammes. Que remarque-t-on ?

Partie B : Un peu de théorie

Quand on considère deux points distincts A et B du plan et deux réels a et b non nuls tels que $a+b\neq 0$, alors il existe un unique point G vérifiant l'égalité vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

⋆ Ce point G est appelé ***barycentre*** des points pondérés $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$.

Soit A et B deux points distincts du plan.

1. (a) En s'inspirant de la **partie A**, conjecturer quel est le barycentre de $(A\,;1)$ et $(B\,;1)$?
   (b) Vérifier par le calcul.
2. Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Tracer un segment $[AB]$ mesurant $5\,\text{cm}$ et y placer le barycentre des points pondérés $(A\,;4)$ et $(B\,;1)$.
3. Soit G' le barycentre des points pondérés $(A\,;k\times a)$ et $(B\,;k\times b)$ avec k réel.
   Montrer que G et G' sont confondus.

TP : Un quadrilatère particulier dans un quadrilatère quelconque

1. Conjecture à l'aide d'une figure sur GeoGebra

(a) Ouvrir `GeoGebra` et construire un quadrilatère $ABCD$ quelconque dans le plan.

(b) Construire les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

(c) Construire le quadrilatère $IJKL$.

(d) Déplacer les points A, B, C et D. Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Démonstration de la conjecture

(a) Décomposer $\overrightarrow{IJ}$ selon un couple de vecteurs judicieusement choisi.

(b) Démontrer la conjecture faite à la question **1 (d)**.