Activités du chapitre nº 9
Variables aléatoires

Exercice nº 1: Exploiter une loi de probabilité

Lequel de ces deux jeux peut-on conseiller ?

Jeu nº 1

Gain x_i	-5	-1	0	1	3
$P(X=x_i)$	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,1$	a

Jeu nº 2

Gain y_i	-3	-1	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,2$	b	$0,1$

Exercice nº 2: Temps de trajet

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Paul effectue en voiture le même trajet tous les jours.
Sur sa route, il y a trois feux.
Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats ci-dessus.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min. Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Paul.
   (a) Exprimer T en fonction de X.
   (b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

Exercice nº 3: Transformation affine

Un coiffeur se déplace à domicile. On note X la v.a. égale au nombre de ces rendez-vous sur une journée.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,03$	$0,09$	$0,15$	$0,38$	$0,18$	$0,17$

1. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
2. Chaque rendez-vous lui rapporte 30€ et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15€.
   (a) On note Y la v.a. égale au gain algébrique quotidien du coiffeur. Exprimer Y en fonction de X.
   (b) En déduire le bénéficie moyen quotidien de ce coiffeur.

Exercice nº 4: Loi de probabilités avec paramètre

1. Déterminer la valeur du paramètre a pour que le tableau ci-contre définisse la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

valeurs x_i	0	1	2	3	4
probabilités p_i	a	a^2	a	$2a$	$0,16$

2. Calculer les probabilités suivantes.
   (a) $P(X=2)$; (c) $P(X<3)$; (e) $P(X\leqslant 1$ ou $X=5)$;
   (b) $P(X\geq 3)$; (d) $P(X\geqslant 1)$; (f) $P(X\geqslant 2$ et $X\leqslant 4)$.

Exercice nº 5

On donne ci-contre la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.
Déterminer le réel a sachant que $E(X)=1,2$.

x_i	-7	a	a^2
p_i	$0,3$	$0,5$	$0,2$

Exercice nº 6: Jeu avec un dé truqué

En lançant un grand nombre de fois un dé cubique, on observe que :

- les fréquences d'apparition des faces nº 1, nº 2, nº 3, nº 4 et nº 5 sont les mêmes ;
- la face nº 6 sort trois fois plus souvent que chacune des autres.

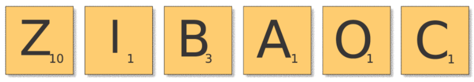
1. Calculer la probabilité de chaque issue de cette expérience aléatoire.
2. Dans un jeu, on mise 3€ et on gagne le nombre de points obtenu au lancer. Calculer le gain moyen.

Exercice nº 7: Dés truqués

1. Un dé déséquilibré à 6 faces est tel que les faces paires ont toutes la même probabilité de sortir, les faces impaires ont toutes la même probabilité de sortir, et les faces paires ont deux fois plus de chances de sortir que les faces impaires. On lance ce dé et on considère la variable aléatoire X qui associe à chaque lancer le nombre obtenu.

   Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance.
2. Sur un dé à six faces, truqué, la probabilité d'obtenir chaque face est proportionnelle au numéro de la face. Quelle est la probabilité d'obtenir le nº 6 ?

Exercice nº 8: Scrabble



On considère les six pièces de Scrabble ci-contre.
On place ces six lettres faces cachées sur une table.
Dans un jeu, on mise de 3€ et on choisit une des six lettres.
On reçoit en euros le nombre de points marqués sur la pièce.

On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique de ce jeu.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un joueur prétend qu'il peut modéliser ce jeu à l'aide d'un dé cubique équilibré.
   Proposer un modèle correspondant à son affirmation.

Exercice nº 9: Roue de Loterie

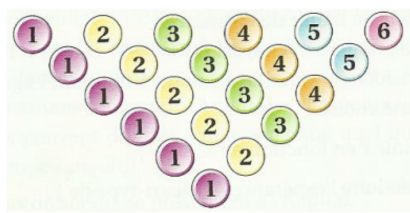
Une roue de loterie est partagée en dix secteurs de quatre couleurs différentes (1 bleu, 3 rouges, 4 verts et 2 roses), comme représenté sur ci-contre.

Quand on lance cette roue, elle tourne, puis s'arrête librement devant le repère.
On suppose que tous les secteurs ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

1. Calculer la probabilité d'obtenir chacune des quatre couleurs.
2. Pour jouer à cette loterie, on mise 5€ puis on fait tourner la roue.
   Si la couleur sortie est le bleu, on perçoit 15€ ; si c'est le rose, on perçoit 10€ ;
   si c'est le rouge, on perçoit 2€ ; et si c'est le vert, on ne perçoit rien.

   Montrer que la probabilité d'avoir un gain global de 10€ est égale à $0,1$.
3. Marie affirme : « Si je joue à cette loterie, j'ai moins d'une chance sur trois de gagner de l'argent, alors je ne jouerai pas ». A-t-elle raison ? Justifier.

Exercice nº 10: Sac de jetons



Un sac contient les jetons numérotés ci-contre.

On pioche au hasard un jeton du sac et on définit la variable aléatoire X qui lui associe le nombre inscrit sur le jeton.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Exercice nº 11: Options de téléphones

Une marque de téléphone portable propose deux options sur ses appareils :

- l'option GPS (notée G)
- l'option le Wifi (notée W).

Sur l'ensemble de la gamme, $40\,\%$ des téléphones possèdent l'option G,

$70\,\%$ l'option W et $24\,\%$ les deux à la fois.
On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque.
On suppose que tous les appareils ont la même probabilité d'être choisis.
On pourra admettre la question 1 pour traiter la 2.

1. **Question de recherche**

   Montrer que la probabilité qu'un téléphone n'ait aucune des deux options est de $0,14$.

2. Pour le fabriquant, le coût de revient par téléphone de l'option G est de 12€ et celle de l'option W, de 6€.

   On note X la variable aléatoire qui indique ce coût par appareil.

   Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice nº 12: Étude de conformité

Une usine produit des objets qui peuvent présenter deux défauts : A ou B.
Sur un lot de 500 objets prélevés,
on constate que :

- 70 objets ont (au moins) le défaut A ;
- 40 objets ont (au moins) le défaut B ;
- 400 n'ont aucun défaut ;

	Avec défaut A	Sans défaut A	Total
Avec défaut B			
Sans défaut B			
Total			500

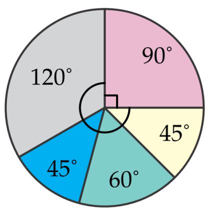
1. Compléter le tableau des effectifs ci-dessus.
2. On prélève au hasard un objet de ce lot.
   (a) Calculer la probabilité que cet objet ne présente aucun défaut.
   (b) Calculer la probabilité que cet objet ne présente que le défaut A.
3. Le coût de production d'un objet est de 50€, auxquels il faut ajouter :
   - 10€ pour la réparation du défaut A
   - 5€ pour la réparation du défaut B.

   On suppose que sur l'ensemble de la production :
   - 80% des objets n'ont aucun défaut
   - 12% ont le défaut A uniquement
   - 6% ont le défaut B uniquement
   - 2% ont les deux défauts.

   On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe son prix de revient (coût de production + coût de réparation éventuelle).

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance $E(X)$.
   (b) On désire faire un bénéfice de 10€ par objet.
   Quel doit être le prix de vente d'un objet produit pour atteindre cet objectif ?

Exercice nº 13: Loterie



Une roue de loterie est partagée en cinq secteurs comme ci-contre.
On suppose que : « la probabilité d'obtenir une couleur est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre du secteur correspondant. »

1. Donner la loi de probabilité de ce modèle de probabilité.
2. À chaque issue (couleur), on associe un gain algébrique selon la règle de décrite ci-dessous :

   bleu : $+5$€ ; jaune : $+5$€ ; vert : 0€ ; rose : -2€ ; gris : -3€.

   Quel gain moyen peut espérer un joueur régulier ?
3. Quel gain g aurait-il fallu attribuer à la couleur verte afin que le jeu soit équitable ?

Exercice nº 14: Machine à jeu

0	1	3
0	2	0
1	0	1

Une machine comprend un écran composé de 9 cases numérotées comme ci-contre.

Lorsqu'on met la machine en marche, l'une des cases s'allume de façon aléatoire, toutes les cases ayant la même probabilité de s'allumer.

Pour jouer une partie, un joueur mise 1€ et actionne la machine, il reçoit alors un montant en euro égal au numéro de la case qui s'est allumée.

Un joueur joue une partie. On note X la variable aléatoire égale à son gain algébrique.

1. Calculer $P(X > 0)$. 2. Calculer $E(X)$.
3. La machine a coûté 25€ au forain qui organise ce jeu. Déterminer le nombre minimum de parties qu'il doit organiser pour amortir sa machine.
4. Une fois la machine rentabilisée, le forain veut modifier le numéro placé dans la case en haut à droite pour que le gain algébrique moyen du jeu soit égal à 0. Quel nombre doit-il inscrire dans cette case ?

Exercice nº 15: Nombre de boules dans une urne

On dispose d'une urne contenant 10 boules blanches et un certain nombre de boules noires.

On pioche au hasard une première boule dans l'urne (on note sa couleur), on la remet dans l'urne puis on pioche une seconde boule.

On associe à cette expérience la variable aléatoire X donnant le nombre de boules blanches obtenues.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-contre. Combien y-a-t-il de boules noires dans l'urne ?

x_i	0	1	2
$\text{p}(X = x_i)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{25}{64}$

Exercice nº 16: Un problème d'optimisation

Une urne contient 50 jetons de couleurs bleue, rouge ou jaune.

10% des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons jaunes que de jetons bleus.

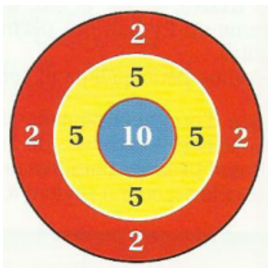
Un joueur tire un jeton au hasard.

- S'il est rouge, il remporte le gain de base.
- S'il est jaune, il remporte le carré du gain de base.
- S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.

On note X le gain à ce jeu.

1. On suppose que le gain de base est 2 euros. (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.
2. On cherche à déterminer la valeur du gain de base g_0, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Soit x le gain de base en euros (arrondi au centime près).
   (a) Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$.
   (b) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (c) Conclure.

Exercice nº 17: Jeu de fléchettes



Bob vise, à coup sûr, la cible ci-contre avec des fléchettes.
Il obtient le nombre de points indiqués dans la zone atteinte.
Chaque couronne de la cible a pour largeur le rayon du cercle central.

Bob lance une série de deux fléchettes.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à la série réalisée le score obtenu.
Déterminer la loi de X et calculer son espérance.