Chapitre 8 : PROBABILITÉS

Cours et méthodes

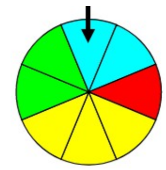
Pour bien comprendre :
Consulter les vidéos (liens en bleus)

1. Expérience aléatoire, loi de probabilité

A. Effectuer une expérience aléatoire

Exemples d'expériences aléatoires

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



Définitions : Une ***expérience*** est ***aléatoire*** lorsqu'elle a plusieurs ***résultats*** ou ***issues*** et que l'on ne peut pas prévoir, *a priori*, quel résultat se produira. L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'***univers***.

Exemple : Si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé alors l'univers est $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

Outil n°1 : Simulation d'une expérience aléatoire > Vidéo : simuler une expérience aléatoire sur tableur

On lance 100 fois un dé à six faces (par une simulation sur tableur, comme on l'a fait avec le PILE ou FACE).
On note les effectifs d'apparition de chaque face et on calcule les fréquences correspondante dans le tableau ci-dessous :

Faces	1	2	3	4	5	6	**Total**
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100
Fréquences	0,2	0,14	0,1	0,22	0,16	0,18	1

On lance maintenant 2700 fois le dé et on obtient les résultats suivants.

Faces	1	2	3	4	5	6	**Total**
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	0,161	0,169	0,164	0,17	0,161	0,175	1

Observations :

- Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres (et proches de $\frac{1}{6}$).
- Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6 (car le dé est équilibré, non truqué).
- En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente. C'est une illustration de ce qu'on appelle la ***loi des grands nombres***.

La suite du cours explique comment calculer les fréquences théoriques d'une expérience aléatoire.

B. Loi de probabilité

Définitions :

- Les fréquences obtenues d'une issue se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (**loi des grands nombres**). Cette valeur s'appelle la ***probabilité de l'issue***.
- L'ensemble des probabilités de ces issues constitue ce qu'on appelle la ***loi de probabilité***.

Propriété : La somme des probabilités des issues est égale à 1.

Exemple : Si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé alors la loi de probabilité est donnée par la tableau suivant :

Issues (univers)	1	2	3	4	5	6	**Total**
Probabilités	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Dans cette expérience aléatoire, les issues ont toutes la même probabilité ; on dit alors qu'il y a ***équiprobabilité***. > Exemple en vidéo

Méthode n°1 : Dénombrer pour calculer une probabilité

On considère l'expérience aléatoire suivante :

- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité de titrer un as ?

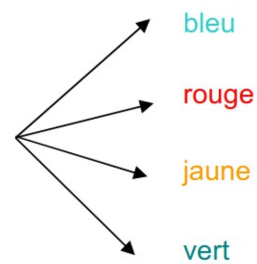
> Explication en vidéo

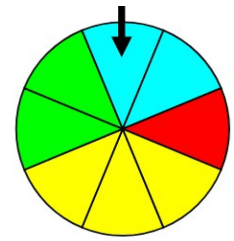
Résolution :
Il a 32 issues possibles car il existe 32 façons différentes de tirer une carte.
L'événement considéré possède 4 issues possibles :
as de cœur, as de carreau, as de trèfle et as de pique.

Conclusion : La probabilité de tirer un as est donc égale à : $p=\frac{4}{32}$.

Outil n°2 : Arbre des possibles

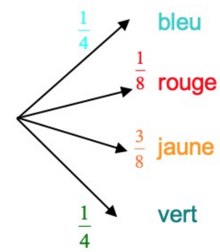
Exemple :
Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues (couleurs) sont possibles.
On le schématise sur l'arbre des possibles :





Définition : L'***arbre des possibles*** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

Sur notre exemple de la roue :
2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue.
Il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.
La probabilité d'obtenir un secteur bleu est donc égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.
On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



> Voir aussi la méthode n°2 ci-dessous

Méthode n°2 : Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles

On considère l'expérience aléatoire suivante :

- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

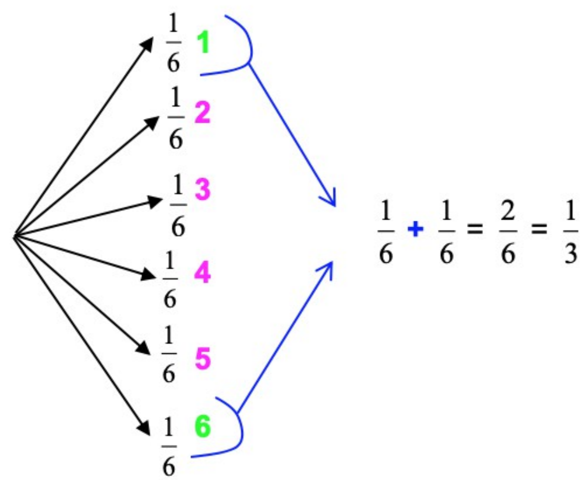
Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 ou un 6 ?

Résolution :

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire ci-contre :
Chaque issue a la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, … ou un 6. On dit qu'il y a ***équiprobabilité***.

On en déduit que la probabilité un 1 ou un 6 est : $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.



2. Événements

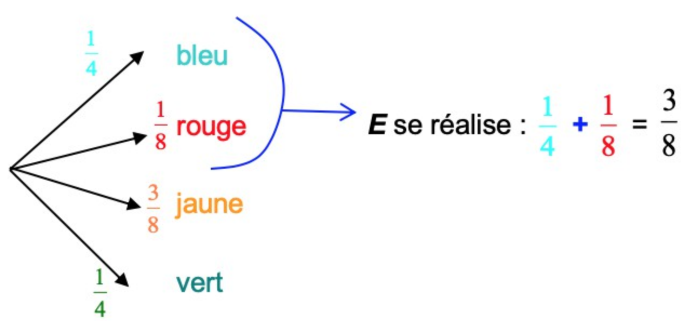
A. Événement, événement élémentaire

Exemple : On reprend l'expérience de la roue.

Soit l'événement ***E***
« La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

Grâce à l'arbre des possibles ci-contre, on voit que la probabilité que cet événement ***E*** se réalise est égale à $\frac{3}{8}$.

On note : P(***E***) = $\frac{3}{8}$.



Définitions :
- Un ***événement*** est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les ***événements élémentaires*** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple précédent de la roue :
- « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un événement.
- « La roue s'arrête sur un secteur bleu » est un événement élémentaire.

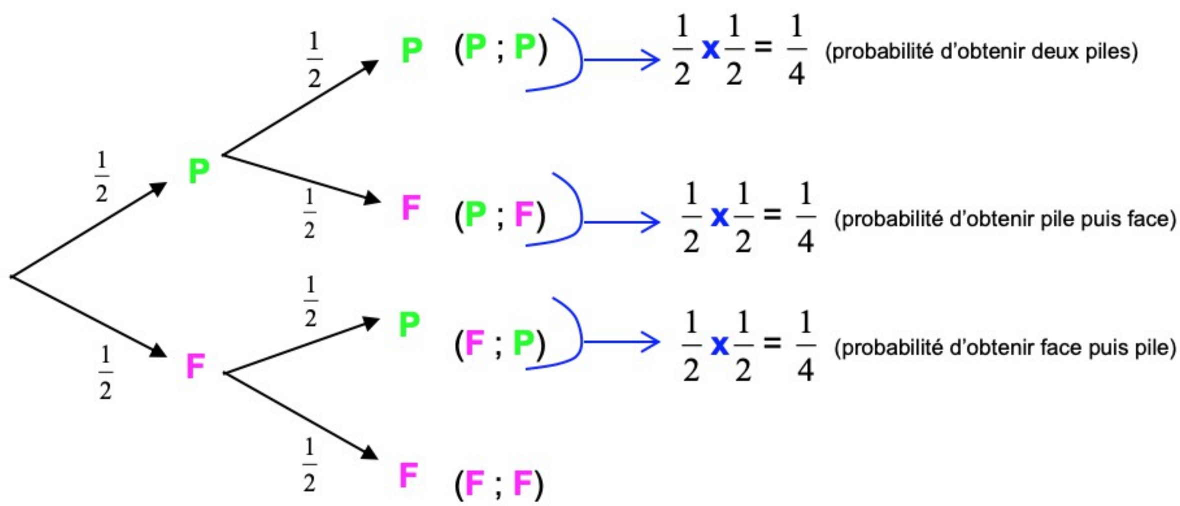
Propriétés :
- La probabilité P(***E***) d'un événement ***E*** est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$ (comprise entre 0 et 1).
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Dans l'exemple précédent de la roue : La probabilité de l'événement « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est égale à : $P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

> Autre exemple en vidéo

Méthode n°3 : Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves (*arbre de probabilité*)

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une ***expérience aléatoire à deux épreuves.***
Soit ***E*** l'événement : « On obtient au moins une fois la face PILE. ». **Calculer P(*E*).**



Règles de l'utilisation d'un arbre de probabilités :
- Sur un même chemin, on **multiplie** les probabilités.
- On **additionne** les probabilités calculées à l'extrémité des chemins

Pour notre problème : D'après l'arbre de probabilités, $P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « PILE » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

> Explication en vidéo

B. Événement contraire

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit ***E*** l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Alors l'***événement contraire*** de ***E*** est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet événement est noté $\overline{E}$.

Définition : L'***événement contraire*** d'un événement ***E*** est l'événement constitué de toutes les issues qui ne sont pas dans ***E***.
On le note $\overline{E}$.

Propriété : La probabilité de l'événement contraire d'un événement ***E*** est : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante :
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.

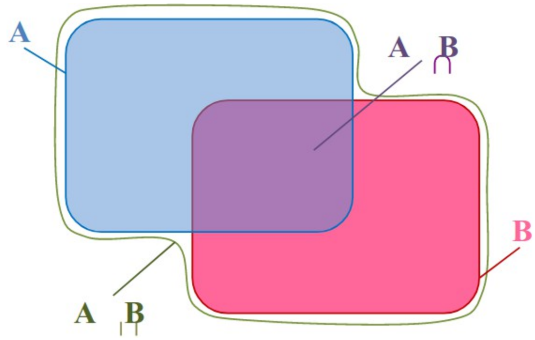
Soit ***E*** l'événement : « On tire un coeur ».
Alors l'***événement contraire*** de ***E*** est : « On tire un carreau, un pique ou un trèfle ».

C. Réunion et intersection de deux événements

Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants : ***A*** : « On tire un valet »
B : « On tire un cœur ou un carreau »

- L'***intersection*** des événements ***A*** et ***B*** est l'événement : « On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ». On note cet événement $A \cap B$ et on lit « ***A*** inter ***B*** »
- La ***réunion*** des événements A et B est l'événement : « On tire le valet de pique, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet événement $A \cup B$ et on lit « A union B »

Définitions :
- L'événement « ***A*** et ***B*** », noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements ***A*** et ***B*** sont simultanément réalisés.
- L'événement **"*A*** ou ***B*"**, noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



Théorème : Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cette relation peut aussi se ré-écrire selon :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Méthode n°4: Calculer une probabilité en utilisant la formule de probabilité d'une réunion

On considère l'expérience aléatoire suivante :
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

On considère les événements suivants :
A : « On obtient un nombre impair »
B : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

> Explication en vidéo

Résolution :
- D'après l'énoncé : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- $A \cap B$ est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc : $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
- L'événement $A \cup B$ a donc pour probabilité :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$
$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

D. Événements incompatibles

Définition : On dit que deux événements ***A*** et ***B*** sont ***incompatibles*** si $A \cap B = \emptyset$ (événement vide, sans aucune issue).

Propriété : Si deux événements ***A*** et ***B*** sont incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.

On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un roi »

Calculer la probabilité de tirer un valet ou un roi.

Résolution :

Les deux événements ***A*** et ***B*** sont incompatibles, car une carte ne peut être à la fois un roi et un valet : $A \cap B = \emptyset$.

On en déduit que la probabilité de l'événement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Méthode n°5 : Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau vidéo en ligne