Activités du chapitre 8
Fonction exponentielle

Activité n° 1: Calculer avec des puissances

Simplifier les quantités suivantes (où p est un entier relatif).

1. Produits et quotients

(a) $5^3 \times 5^9$
(b) $5^3 \times 9^3$
(c) $(7^2)^3 \times 7^{-5}$
(d) $\frac{11^3}{11^2}$
(e) $\frac{1}{6^{-1}}$
(f) $\frac{8^3}{7^3}$
(g) $3^5 \times 9^7$
(h) $\frac{3^5}{9^7}$
(i) $\frac{2{,}1^3 \times (2{,}1^{-2})^4}{2{,}1^{-5}}$
(j) $15^3 \times 15^p$
(k) $5^p \times 4^p$
(l) $(7^p)^3 \times 7^{-p}$
(m) $\frac{31^{p+1}}{31^p}$
(n) $\frac{13}{13^{-p}}$
(o) $\frac{3^p}{6^p}$
(p) $3^p \times 9^7$
(q) $\frac{3^p}{9^7}$
(r) $\frac{2{,}1^{3p} \times (2{,}1^{-2p})^4}{2{,}1^{p-5}}$

2. Sommes (factoriser)

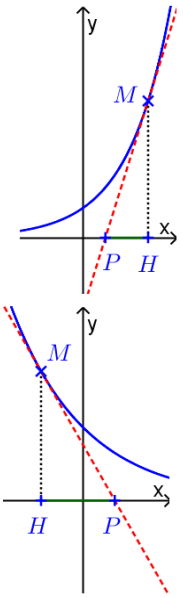
(a) $5^3 \times 4 + 5^3$
(b) $5^3 \times 4 - 5^3$
(c) $5^3 \times 4 + 5^4$
(d) $5^3 \times 4 - 5^4$
(e) $5^3 + 5^4$
(f) $5^3 - 5^4$
(g) $5^p \times 4 + 5^p$
(h) $5^p \times 4 - 5^{p+1}$

Activité n° 2: Introduction historique à fonction exponentielle

En 1694, le mathématicien allemand Leibniz utilise pour la première fois, dans une correspondance avec Jean Bernoulli, le terme « exponentiel » pour résoudre le problème suivant :

Déterminer une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante :

> « *Pour tout point M de $\mathcal{C}$, si P est le point d'intersection de la tangente T en A avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de M sur cet axe, alors la distance PH est égale à 1* » *(propriété $(\mathcal{P})$).*



1. On note a l'abscisse de M.
   (a) Donner les coordonnées de M et de H en fonction de a.
   (b) Écrire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en M. En déduire les coordonnées de P en fonction de a.
2. Exprimer les côtés du triangle MPH en fonction de a.
3. Démontrer que la propriété $(\mathcal{P})$ équivaut à $f' = f$ ou $f' = -f$.

Activité n° 3: Introduction à la fonction exponentielle

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Dans cette question, on souhaite montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
   Fonction « ooutil » : $p(x) = f(x) \times f(-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 0$.
   (b) En déduire que p est une fonction constante et déterminer sa valeur.
   (c) Justifier que la fonction f ne s'annule pas. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
2. (a) Que peut-on dire du signe de f' ? Dresser le tableau de variation de f.
   (b) En déduire le tableau de signe de f.
3. Résoudre les inéquations suivantes : (a) $f(x) > 1$; (b) $f(x) < 1$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. On considère la fonction δ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\delta(x) = f(x) - (x+1)$.
   (a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de signe de $\delta(x)$.
   (b) Interpréter graphiquement ce résultat.

Méthode n° 1: Dériver une fonction où intervient $\exp$ (ER 1 page 145)

Produit

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4x+1)\,\mathrm{e}^x$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (4x+5)\,\mathrm{e}^x$.
2. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour s'exercer :

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$;
(b) $g : x \longmapsto (2-3x)\,\mathrm{e}^x$;
(c) $h : x \longmapsto x^2 \times \mathrm{e}^x$.

Quotient

On désigne par p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = 1 - \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $p'(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
2. En déduire le sens variation de p sur $\mathbb{R}$.

Pour s'exercer

1. On considère la fonction q définie, pour tout nombre réel x, par : $q(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
   (a) Justifier que la quantité $\mathrm{e}^x + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $q'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$. En déduire le sens variation de q sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction r définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $r(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Méthode n° 2: Dériver une fonction de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ (ER 2 page 145)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4,5\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{3x}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 9\,\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$).

Pour s'exercer

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$. Démarche usuelle :

1) Calcul de la dérivée f' ; factorisation « optimale » de $f'(x)$;
2) étude du signe de $f'(x)$; 3) tableau de variation de f.

(a) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{4x}$
(b) $f(x) = (1-5x)\,\mathrm{e}^{3x}$
(c) $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-3x}$
(d) $f(x) = (1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$
(e) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x + 1$
(f) $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$
(g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$
(h) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$ $(x \in\,]\,0\,;+\infty\,[)$.

Méthode n° 3: Transformer une expression (ER 3 page 146)

1. Simplifier l'écriture des nombres suivants : **(a)** $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4$ **(b)** $\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-4}$ **(c)** $\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}$ **(d)** $\left(\mathrm{e}^4\right)^3 \times \mathrm{e}^4$

   (e) $\left(\mathrm{e}^3\right)^{-2} \times \mathrm{e}^5$
   (f) $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^5 + 5(\mathrm{e}^2)^3$
   (g) $\left(\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - \left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$.
   (h) $\dfrac{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^2}$
   (i) $\dfrac{\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^3}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2}$
   (j) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{15}\right)^2}{\mathrm{e}^5} \times \dfrac{\mathrm{e}^3}{\left(\mathrm{e}^4\right)^7}$
   (k) $\dfrac{\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}} - 1}$

2. Soit x un nombre réel. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$
   (b) $\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$
   (c) $\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1\right)$
   (d) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}\right)^2$
   (e) $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 - \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2}\right)^2$
   (f) $\mathrm{e}^{3x} \times \dfrac{\left(\mathrm{e}^x\right)^5}{\mathrm{e}^{2x}}$

3. Démontrer les égalités suivantes, pour tout nombre réel x :

   (a) $\mathrm{e}^x - 6 + \dfrac{5}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 5)(\mathrm{e}^x - 1)$ **(b)** $\mathrm{e}^{3x}\left(1 - \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-3x}\right) = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - 2$.

Exercice n° 1: Équations se ramenant à $\mathrm{e}^{A(x)} = \mathrm{e}^{B(x)}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\mathrm{e}^{x+7} = \mathrm{e}^{3x+1}$
(b) $\mathrm{e}^{2-x} = 1$
(c) $\exp(x) = \mathrm{e}$
(d) $\exp(-x) = 1$
(e) $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$
(f) $\mathrm{e}^{x+3} - \mathrm{e}^{x^2+1} = 0$
(g) $\exp(2x-1) = \mathrm{e}$
(h) $\mathrm{e}^{x^2+x} = 1$
(i) $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$
(j) $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 0$
(k) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$
(l) $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$
(m) $x\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{2x} = 0$
(n) $\mathrm{e}^{5x+6} = 1$
(o) $\mathrm{e}^{-3x^2} = 1$
(p) $\mathrm{e}^{(x-4)(2x-1)} = \mathrm{e}$
(q) $\mathrm{e}^{x^2-4} = \mathrm{e}^{x-2} \times \mathrm{e}^{x-2}$.

Exercice n° 2: Équations avec changement de variable

1. Déterminer les racines du polynôme $X^2 + 4X - 5$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} = 5$.

Pour s'exercer. Résoudre :
(a) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$;
(b) $\mathrm{e}^{2x+1} + \mathrm{e}^{x+1} - 2\mathrm{e} = 0$;
(c) $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$.

Exercice n° 3: Inéquations se ramenant à $\mathrm{e}^{A(x)} \leqslant \mathrm{e}^{B(x)}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $\exp(x) < \mathrm{e}$
(b) $\exp(-x) \geqslant 1$
(c) $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^{x}$
(d) $\mathrm{e}^{x} < 1$
(e) $\mathrm{e}^{-x} > 0$
(f) $\mathrm{e}^{-x} > 1$
(g) $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 0$
(h) $\mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0$
(i) $x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} < 0$
(j) $\mathrm{e}^{x+7} \geqslant \mathrm{e}^{3x+1}$
(k) $\mathrm{e}^{x+3} - \mathrm{e}^{x^2+1} < 0$
(l) $\mathrm{e}^{5x+6} \leqslant 1$
(m) $\mathrm{e}^{-3x^2} - \mathrm{e}^{-12} > 0$
(n) $\exp((x-4)(2x-1)) \leqslant \mathrm{e}$
(o) $\mathrm{e}^{x^2-4} > \mathrm{e}^{x-2} \times \mathrm{e}^{x-2}$.

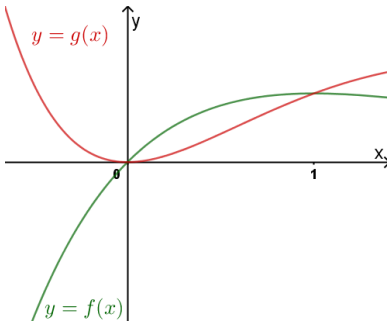
Exercice n° 4: Positions relatives de courbes

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.
Dans le plan muni d'un repère, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g.

Problème : *On souhaite étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$.*

Pour tout réel x, on pose $\delta(x) = g(x) - f(x)$.

1. Factoriser l'expression $\delta(x)$. Dresser le tableau de signe de $\delta(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter ce tableau pour répondre au problème posé.



Méthode n° 4: Dresser un tableau de variation (ER5 page 147)

Situation 1 : Utiliser les propriétés de exp

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x) - x + 4$.

1. Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Rappeler l'ensemble solution de l'inéquation $\exp(x) > 1$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Pour s'exercer :
Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:
(a) $f : x \longmapsto \exp(x) - x - 2$;
(b) $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e} \times x$.

Exercice n° 5: Encadrer une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto \dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 7}$.

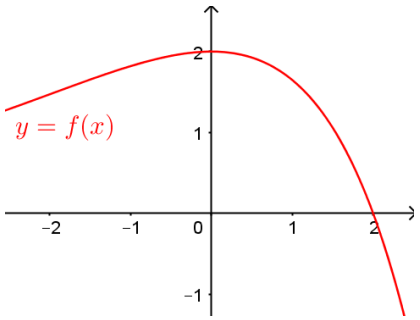
1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de f.
3. En déduire que, pour tout réel x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$. Prouver qu'on a même $0 < f(x) < 4$.

Exercice n° 6: Avec une fonction auxiliaire

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{x}$.
   (a) Obtenir par le calcul le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ (conjecturer les limites aux bornes).
   (b) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\, g(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (conjecturer les limites aux bornes).

Exercice n° 7: Fonction avec paramètres

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est donnée ci-contre, dans un repère orthonormé du plan.



On sait que $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$$

où a et b sont deux réels.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$, de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En déduire les valeurs de a et de b.
3. Dresser le tableau de variation de f par le calcul.

Exercice n° 8: Évolution d'une population d'insectes

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de l'espèce. L'étude a été effectuée sur un échantillon de $25\,000$ insectes.

Une étude a permis de montrer que la population diminue très rapidement lors des quatre premières années.

Elle peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par : $f(t) = 25\mathrm{e}^{-0,5t}$
(où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes).

Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année (arrondir à $0,1$ % près).

Exercice n° 9: Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton stipule que le *taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.*

Contexte : Une tasse de café est servie à une température initiale de $80°$ C dans un milieu dont la température (en degré Celsius), supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant un modèle qui utilise une fonction.

Pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi : $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2\left(\theta(t) - M\right).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$.

   On cherche ainsi une fonction θ vérifiant :

   $$\theta(0) = 80 \quad \text{et, pour tout } t \in [0\,;+\infty[,\ \theta'(t) = -0,2\,\theta(t).$$

   (a) Analyse : Soit θ est une telle fonction. On pose, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

   Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = 0$.

   (b) En conservant l'hypothèse de la question **(a)**, calculer $f(0)$.

   En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

   (c) Synthèse : Vérifier que la fonction θ trouvée en **(b)** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$.

   On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\,;+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que :

   $$\text{pour tout } t \in [0\,;+\infty[, \quad g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t},$$

   où t est exprimé en minute et $g(t)$ en degré Celsius.

   Une personne aime boire son café à $40°$ C.

   Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\,;+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.

   Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.