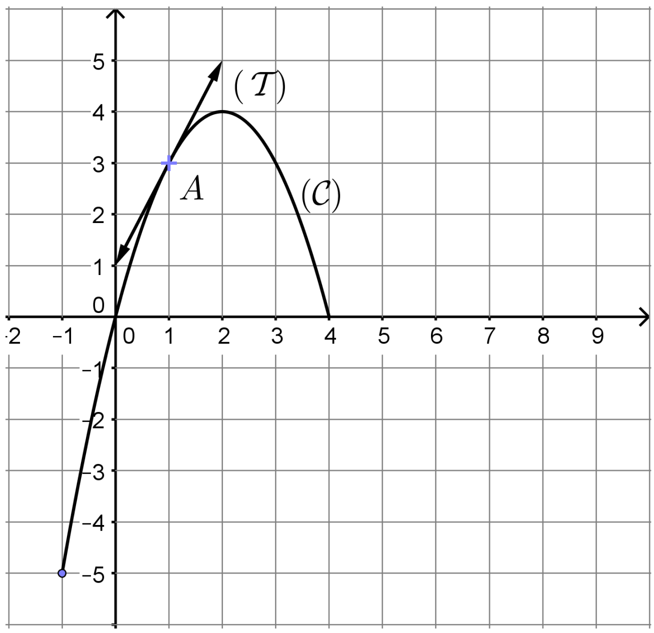
Exercices du chapitre 7

Dérivation et applications

Exercice nº 1: Synthèse des propriétés du cours

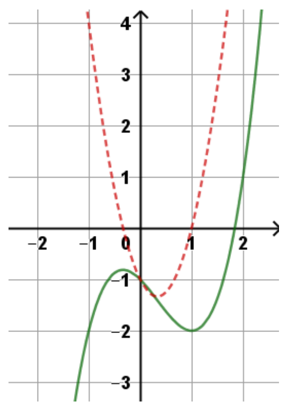
On considère une fonction f *définie* et *dérivable* sur l'intervalle $\left[-1\,;\,9\right]$. La fonction f admet le tableau de variation suivant.

x	-1		2		6		9
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5



1. À l'aide du tableau :
   (a) Donner $f(6)$ et $f'(6)$.
   (b) Justifier que f admet une *minimum local* en 6.
2. Dans le *repère orthonormé* ci-contre, on a tracé une partie de la *courbe* $(\mathcal{C})$ de f.
   (a) Placer le *point d'abscisse* 6 de $(\mathcal{C})$.
   (b) Construire la *tangente* à $(\mathcal{C})$ en ce point.
3. La droite $(\mathcal{T})$ est tangente à $(\mathcal{C})$ en A. À l'aide de la figure, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
4. On sait de plus que $f(8) = 0$ et $f'(8) = 4$.
   (a) Tracer la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 8. (b) Déterminer une équation de cette tangente.
5. Construire la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à l'intervalle $\left[4\,;\,9\right]$.

Exercice nº 2: Étude d'une fonction polynôme de degré 3 (SF3)



On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - x - 1$.

1. (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser son tableau de signe.
   (c) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.
   (a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
   (b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.
   (c) Tracer ces deux tangentes sur la figure.

Exercice nº 3: Études de fonctions polynômes (SF2, SF3, SF4)

Dans chaque cas :

- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
- En déduire le tableau de variation de f.

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (d) $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$

(b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 1$ (e) $f(x) = (3x-4)^7$

(c) $f(x) = x^4 - 4x$ (f) $f(x) = (x^2-3)^2$

Exercice nº 4: Étude d'une fonction rationnelle (SF5)

On considère la fonction f qui à un réel x associe, lorsque c'est possible, $f(x) = 25x - 3 + \dfrac{4}{x}$.

1. (a) Pour tout x non nul, calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{(5x-2)(5x+2)}{x^2}$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. En déduire le tableau de variation de f.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse -1 de la courbe de f.

Exercice n° 5: Entraînement SF5

Dans chaque cas :

- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
- En déduire le tableau de variation de f.

(a) $f(x) = \dfrac{5\,x+4}{x}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{-5}{x^2+1}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^6}$

(e) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ **(h)** $f : x \longmapsto -\dfrac{3}{x^2}$ **(k)** $f : x \longmapsto \dfrac{6}{x^2-4}$

(f) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ **(i)** $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{-2x+5}$ **(l)** $f : x \longmapsto x^2 - \dfrac{1}{x}$

(g) $f : x \longmapsto \dfrac{3}{x^3+1}$ **(j)** $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ **(m)** $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2+x}{4x+1}$

Exercice n° 6: Étudier une fonction avec un radical (SF6)

Dans chaque cas :

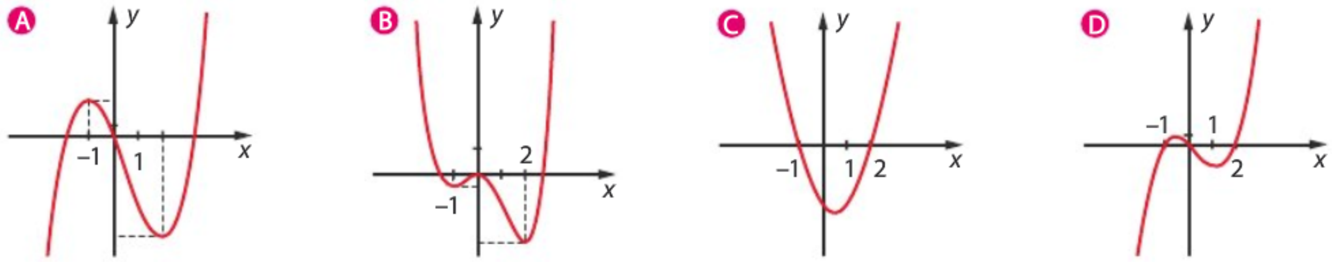
- Calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
- En déduire le tableau de variation de f.

(a) $f(x) = x - 9\sqrt{x}$ **(c)** $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$ **(d)** $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2$

Exercice n° 7: Associer une fonction à sa dérivée

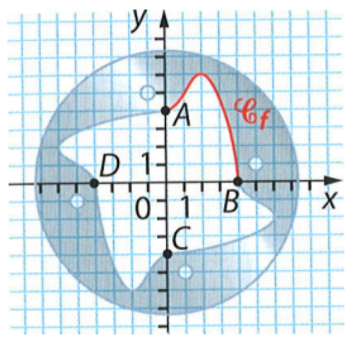
Voici les courbes de deux fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et de leurs dérivées f' et g'.



Sachant que $\boxed{\text{A}}$ est la courbe représentant f, trouver la courbe de f'. Trouver les courbes de g et de g'.

Exercice n° 8: Évidement d'un disque de frein

Un disque de frein peut être une pièce circulaire dans laquelle on a évidé une partie centrale comme sur le schéma donné ci-contre :



Le contour de l'évidement entre les points A et B est modélisé par la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(x) = -\dfrac{3}{8}x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 + a$, où a est un nombre réel.

1. **(a)** Calculer a pour que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A\,(0\,;4)$.

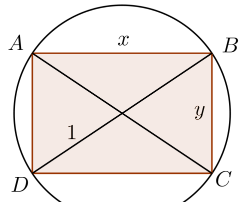
   (b) Vérifier que $\mathcal{C}$ passe par le point $B\,(4\,;0)$.

2. **(a)** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;4]$, calculer $f'(x)$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;4]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire l'espacement maximum entre le contour de l'évidement (l'arc AB) et l'axe des abscisses.

Exercice n° 9: Rectangle inscrit d'aire maximale (problème ouvert)



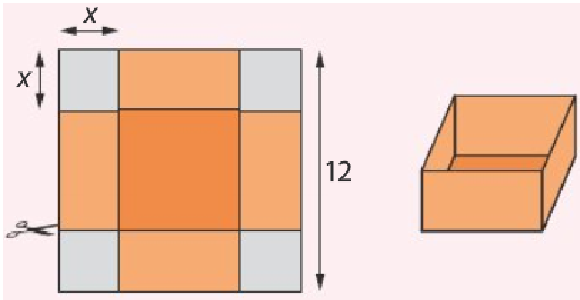
Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1.

On note $AB = x$ et $BC = y$.

Déterminer l'aire maximale que peut avoir $ABCD$.

Quelle est alors la nature de ce dernier ?

Exercice n° 10: Boîte de volume maximal

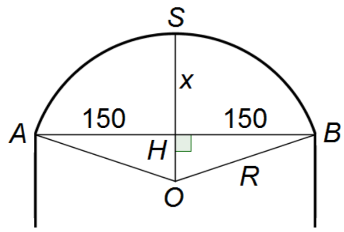


Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de x cm de côté.

En relevant les bords, on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.

1. À quel intervalle le réel x appartient-il ?
2. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x.
3. Calculer $V'(x)$ puis étudier son signe, pour tout x de l'intervalle $[0;6]$.
4. Étudier les variations de la fonction V puis dresser son tableau de variation.
5. Quel est le volume maximal de cette boîte ? Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il obtenu ?

Exercice n° 11: Flèche minimale

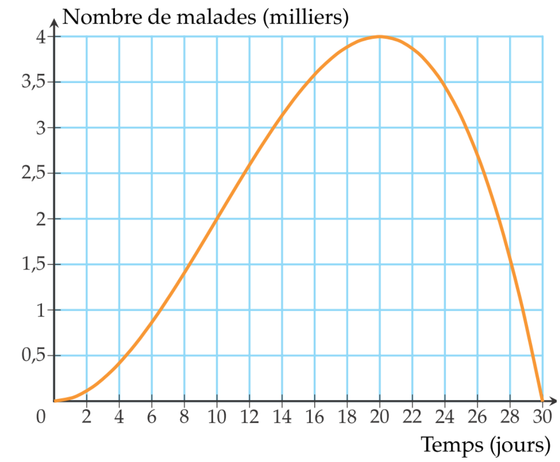


Une entreprise doit réaliser le plafond cintré d'une chambre selon le schéma ci-contre (les dimensions indiquées sont en cm).

La *flèche* $x = SH$ dépend du rayon de cintrage R qui est le rayon de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ de centre O, passant par S : $OA = OS = OB = R$.

1. À l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que : $R = \dfrac{x}{2} + \dfrac{11\,250}{x}$.
2. On considère la fonction $R : x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{11\,250}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.
   (a) Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, calculer $R'(x)$ puis montrer que $R'(x) = \dfrac{(x-150)(x+150)}{2x^2}$.
   (b) Étudier le signe de $R'(x)$ puis dresser le tableau de variation de R sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire la flèche qui rend le rayon R minimal.

Exercice n° 12: Propagation d'une maladie



L'objectif de cet exercice est d'étudier la vitesse de propagation d'une maladie.

Le nombre de malades en fonction du temps t, exprimé en jours, peut être modélisé par la fonction f, définie sur $[0;30]$ par : $f(t) = -t^3 + 30t^2$.

1. Déterminer la vitesse moyenne de propagation entre le déclenchement de la maladie et le 10e jour.
2. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.
   (a) Quel semble être le jour où la maladie a atteint son pic ?
   (b) Quelle est alors la vitesse de propagation de la maladie ce jour-là ?
   (c) À partir de quel jour la vitesse de propagation de la maladie diminue-t-elle ?
3. Pour tout réel t de l'intervalle $[0;30]$, on note $v(t) = f'(t)$ la vitesse de propagation de la maladie.
   (a) Exprimer $v(t)$ en fonction de t.
   (b) Pour tout réel t de l'intervalle $[0;30]$, calculer $v'(t)$ puis étudier son signe.
   (c) Étudier les variations de la fonction v puis dresser son tableau de variation sur $[0;30]$.
4. À l'aide de la question 3, retrouver les résultats de la question 2. Interpréter en termes d'accélération.

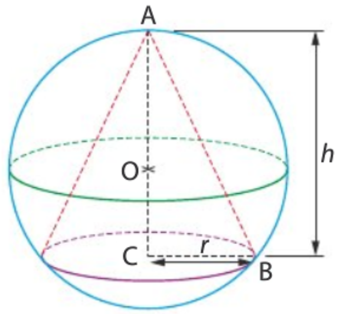
Exercice n° 13: Coût moyen et coût marginal en économie

Une entreprise produit un bien alimentaire en quantité q (en tonnes), pour $q \in [0;10]$.

Le *coût total de production* $C_T(q)$, exprimé en milliers d'euros, est donné par $C_T(q) = \dfrac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q + 36$.

1. Le *coût marginal* C_m est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(q) = C'_T(q)$.
   (a) Exprimer $C_m(q)$ en fonction de q, pour tout $q \in [0\,;\,10]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
2. Le *coût moyen* M est défini par : $M(q) = \dfrac{C_T(q)}{q}$.
   (a) Exprimer $M(q)$ en fonction de q, pour tout $q \in [0\,;\,10]$.
   (b) Pour tout $q \in [0\,;\,10]$, calculer $M'(q)$ puis montrer que :
   $$M'(q) = \frac{(q-6)(2q^2+3q+18)}{3q^2}.$$
   (c) Étudier le signe de $M'(q)$ pour $q \in [0\,;\,10]$.
   (d) En déduire les variations de la fonction M sur $[0\,;\,10]$.
   (e) Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimum ?
   Vérifier que le coût moyen est alors égal au coût marginal.

Exercice nº 14: Une boule lumineuse

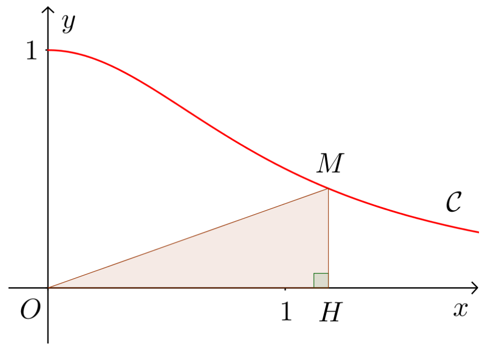


Pour les décorations de fin d'année, le responsable technique d'une entreprise veut inscrire un cône de révolution dans une sphère de centre O et de rayon 50 cm.

Il veut déterminer la hauteur h de ce cône afin que le volume du cône soit maximal.

1. Démontrer que le rayon r de la base du cône est tel que : $r^2 = 100h - h^2$.
2. En déduire que le volume du cône est donné par : $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi\left(100h^2 - h^3\right)$.
3. Déterminer la valeur de h pour laquelle le volume du cône est maximal.

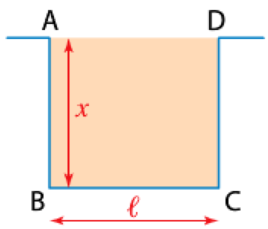
Exercice nº 15: Triangle sous une courbe



On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.
2. Soient M un point variable de $\mathcal{C}$ et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
   Déterminer la position de M sur $\mathcal{C}$ pour laquelle l'aire du triangle OMH est maximale.

Exercice nº 16: Canal à frottement minimal



On veut faire circuler un fluide avec un frottement minimal dans un canal à section intérieure rectangulaire. On a représenté ci-contre cette section $ABCD$.

x désigne la hauteur de la section (en m), ℓ est la largeur de la section (en m).

1. Les contraintes imposent que l'aire de la section $ABCD$ est $0,02\,\text{m}^2$.
   Exprimer ℓ en fonction de x.
2. On note $L(x)$ la longueur du contour intérieur (en m), c'est-à-dire : $L(x) = AB + BC + CD$.
   Montrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $L(x) = 2x + \dfrac{2}{100x}$.
3. (a) Pour tout nombre réel $x > 0$, calculer $L'(x)$ puis montrer que : $L'(x) = \dfrac{200(10x-1)(10x+1)}{(100x)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $L'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction L.
4. Le frottement est minimal lorsque $L(x)$ est minimal.
   Déduire de l'étude précédente les valeurs de x et de ℓ pour lesquelles le frottement est minimal.

Exercice nº 17: Propagation d'une onde (problème ouvert)

On jette une pierre dans un lac qui produit alors des ondes concentriques à la surface de l'eau.
On suppose que le rayon de l'onde croît à une vitesse de $5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
À quelle vitesse croît la surface (circulaire) de cette onde lorsqu'elle a atteint un rayon de 12 m ?