Exercices du chapitre n° 6
Applications du produit scalaire

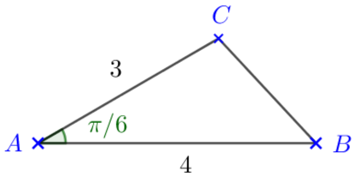
M1 : Calculer un p.s. en utilisant une méthode adaptée

Exercice n° 1: Expression avec le cosinus (définition)

ABC est un triangle tel que :

$AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ rad.

Calculer les p.s. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.



Exercice n° 2: Expression dans un repère orthonormé (propriété 3)

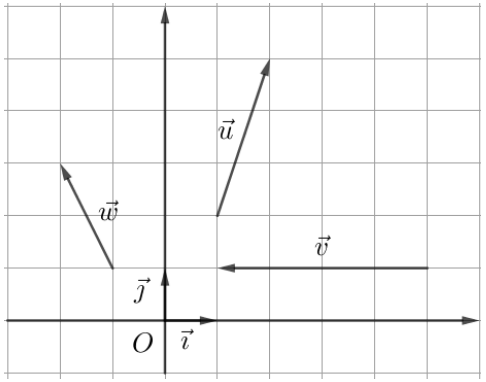
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a représenté trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Lire les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ puis calculer les produits scalaires suivants :

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (d) $\vec{w} \cdot (-\vec{v})$

(b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ (e) $\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right) \cdot \vec{w}$

(c) $(-\vec{w}) \cdot \vec{v}$ (f) $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v}$

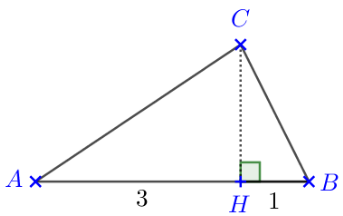


Exercice n° 3: Avec le projeté orthogonal (propriété 1)

ABC est un triangle, H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On donne : $AH = 3$; $BH = 1$; $AC = 5$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. (a) Calculer les longueurs CH et CB.
   (b) En déduire les produits scalaires suivant.
   $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HB}$.
3. Soit B' l'image de B par la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   En se plaçant dans le repère (H, B, B'), retrouver les p.s. de la 2(b).



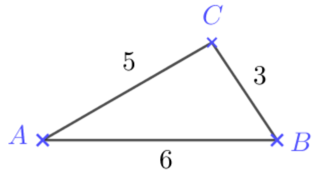
Exercice n° 4: Expression métrique (propriété 2)

ABC est un triangle tel que :

$AB = 6$, $BC = 3$ et $CA = 5$.

Calculer les produits scalaires suivants :

$p = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $q = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$; $r = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

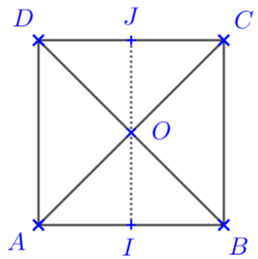


Exercice n° 5: Dans un carré

- $ABCD$ est un carré de côté 5 et de centre O ;
- I est le milieu du segment $[AB]$;
- I est le milieu du segment $[CD]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

$p = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $q = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$; $r = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$; $s = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$.



Exercice n° 6: Entraînement

1. ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.
   Calculer les produits scalaires suivants.
   $\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\beta = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\gamma = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$; $\delta = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.
2. Dans un repère orthonormé, on donne : $\vec{u}\binom{2}{-3}$; $\vec{v}\binom{-1}{4}$; $\vec{w}\binom{0}{5}$.
   Calculer les produits scalaires suivants : $a = \vec{u} \cdot \vec{v}$; $b = \vec{v} \cdot \vec{w}$;
   $c = \vec{w} \cdot (-\vec{u})$; $d = (3\vec{w}) \cdot (7\vec{v})$; $e = (5\vec{u}) \cdot (5\vec{u})$; $f = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.
3. ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$.
   Calculer les produits scalaires suivants :
   $\mu = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\nu = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$; $\kappa = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
4. $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 5$ et $AC = 4$.
   (a) Calculer les longueur AD et OC.
   (b) Calculer les produits scalaires suivants.
   $a = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $b = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$; $c = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB}$; $d = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

M2 : Utiliser le p.s. pour résoudre un problème de géométrie

Exercice n° 7: Vecteurs orthogonaux

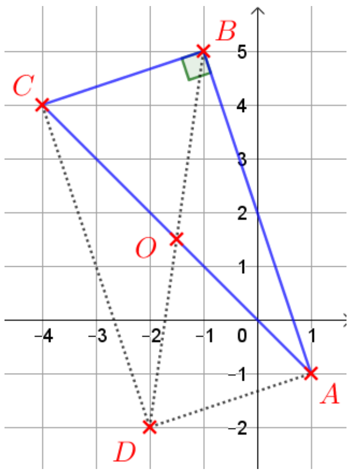
On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

1. Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non.
   (a) $\vec{u}\binom{3}{-5}$ et $\vec{v}\binom{5}{3}$; (b) $\vec{u}\binom{0{,}1}{-0{,}5}$ et $\vec{v}\binom{10}{2}$; (c) $\vec{u}\binom{0}{7}$ et $\vec{v}\binom{9}{0}$
2. (a) Vérifier que les vecteurs $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et unitaires (de normes 1).
   (b) Soit θ un nombre réel quelconque. Vérifier que les vecteurs $\vec{t}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et unitaires.
3. Dans chaque cas, donner deux vecteurs orthogonaux au vecteur donné.
   (a) $\vec{u}\binom{7}{8}$; (b) $\vec{v}\binom{-2}{1}$; (c) $\vec{w}\binom{-3}{0}$; (c) $\vec{z}\binom{x}{y}$ (x, y réels).

Exercice n° 8: Étudier une configuration

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points

$$A(1;-1),\ B(-1;5),\ C(-4;4).$$



1. Démontrer que le triangle ABC de deux manière différentes :
   - en le théorème de Pythagore ;
   - en utilisant le p.s. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Préciser la nature de $ABCD$. Justifier.
4. On note O le centre de $ABCD$. Calculer les produits scalaires suivants :
   $\alpha=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$; $\beta=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BA}$; $\gamma=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$.

Exercice n° 9: Droites perpendiculaires

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

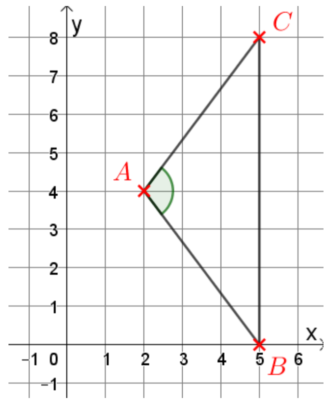
1. On considère les droites D et Δ d'équations respectives
   $$y=-2x+1 \text{ et } y=0,5x-3.$$
   (a) Trouver des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de D et Δ respectivement.
   (b) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour démontrer que D et Δ sont perpendiculaires.
2. Dans chaque cas, dire si les droites sont perpendiculaires ou non.
   (a) $\begin{cases} D: \ y=4x+3\\ \Delta: \ y=0,25x-2\end{cases}$ (b) $\begin{cases} D: \ y=10x+3\\ \Delta: \ y=-0,1x+2\end{cases}$

M3 : Utiliser le p.s. pour calculer une longueur ou un angle

Exercice n° 10: Dans un repère orthonormé

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points

$$A(2;4),\ B(5;0) \text{ et } C(5;8).$$



1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (b) Calculer les longueurs AB et AC.
   (c) À l'aide de la formule du cosinus, exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
   (d) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ (arrondir au degré près).
2. Déterminer les mesures, arrondies au degré près, de $\widehat{CBA}$ et de $\widehat{ACB}$.

Exercice n° 11: Étude d'un quadrilatère

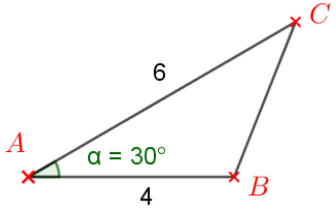
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2;-2)$, $B(4;-1)$, $C(3;1)$ et $D(1;0)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et les longueurs AB et AC.
3. En déduire la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$. Justifier.

Exercice nº 12

On considère un triangle ABC tel que :

$$AB = 4,\ AC = 6 \text{ et } \widehat{BAC} = 30°.$$

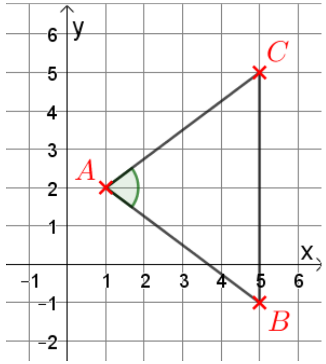


1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire BC.
2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire la mesure en degré de $\widehat{ABC}$.
3. Calculer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice nº 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points

$$A(1;2),\ B(5;-1) \text{ et } C(5;5).$$

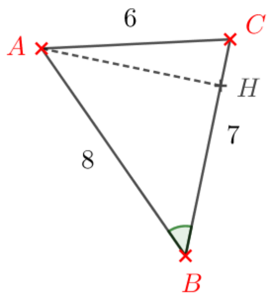


1. Calculer les longueurs AB, BC, CA.
2. Calculer les produits scalaires suivants :
   $\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\beta = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$,
   et $\gamma = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminer les mesures, arrondies au degré près, des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice nº 14

On considère un triangle ABC où :

- $AB = 8$, $AC = 6$, $BC = 7$;
- H est le pied de la hauteur issue de A.

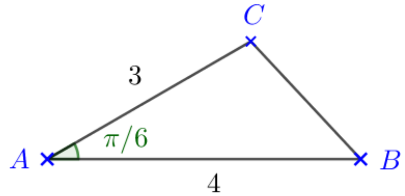


1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. En déduire la longueur BH ; puis AH et CH.
3. Calculer les p.s. suivants : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Exercice nº 15

ABC est un triangle tel que :

$$AB = 4,\ AC = 3 \text{ et } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$



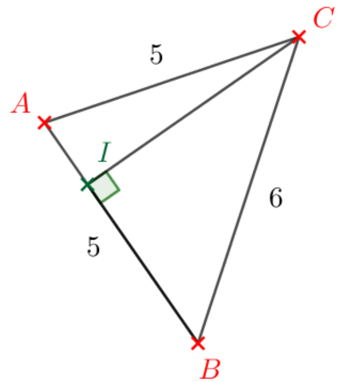
1. En utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculer BC.
2. Déterminer les mesures, arrondies au degré près, des angles de ABC.

Exercice nº 16

ABC est un triangle isocèle en A tel que

$$AB = 5 \text{ et } BC = 6.$$

O est le milieu du segment $[BC]$.



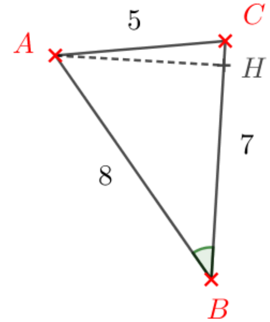
1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. On note I le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer la longueur BI.
3. En déduire les longueurs CI et AI.
4. Déterminer la mesure, arrondie au degré, de $\widehat{ICA}$ et de $\widehat{ICB}$.

Exercice nº 17

On considère un triangle ABC tel que :

$$AB = 8,\ AC = 5 \text{ et } BC = 7.$$

On note H le pied de la hauteur issue de A.



1. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (arrondir au degré près).
2. En déduire la longueur AH.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. On note H' le pied de la hauteur issue de C. Calculer CH'.

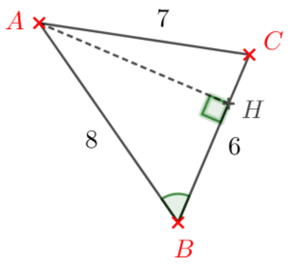
Exercice n° 18

On considère un triangle ABC tel que :

$$AB = 8,\ \ AC = 7 \text{ et } \ BC = 6.$$

On note H le pied de la hauteur issue de A.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. En déduire la longueur BH.



Exercice n° 19: Démonstrations de propriétés du cours

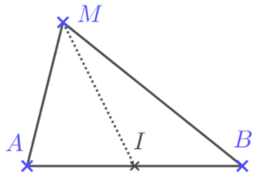
1. Calcul algébrique

   Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

   Montrer que $(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{v}\|^2$.

2. Démonstration de la propriété 8 du cours

   Soient A, B, M trois points et I le milieu de $[AB]$.

   (a) Montrer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

   (b) Exprimer de même $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$.

   (c) Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$.

3. Application

   On considère un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 3$, $BC = 5$.
   Calculer la longueur de la médiane issue de C.

4. Démonstration du théorème de la médiane.

   On reprend les notations de la question 2.

   (a) Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

   (b) En déduire que $MA^2 + MB^2 = 4\,MI^2 - 2\,\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

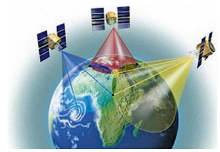
   (c) Démontrer enfin que $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Exercice n° 20: Déterminer un ensemble de points

Soit ABC un triangle. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est une droite remarquable du triangle ABC.
Mais quel est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right)\,?$$

Exercice n° 21: Trilatération

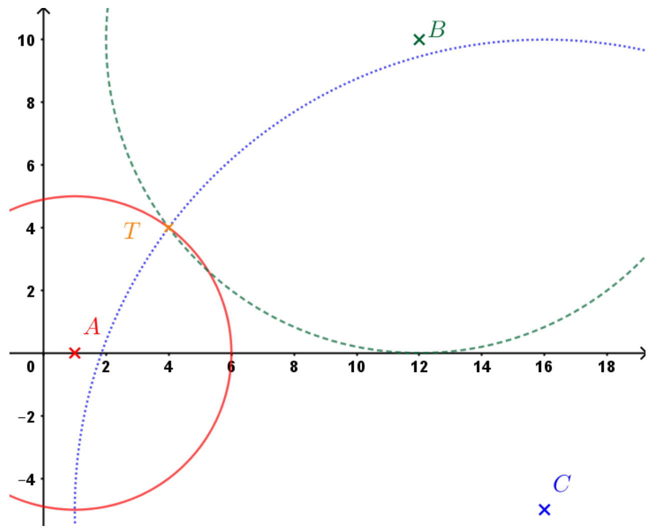


Bob est perdu. Son GPS est hors service.
Il a été borné par trois satellites A, B, C.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la position de Bob.

Document 1 : La trilatération

La trilatération combine les mesures de différentes longueurs pour localiser un point à l'aide de quelques notions de géométrie plane.
Voici une image qui représente la trilatération 2D avec les cercles représentant la zone observée par chaque satellite.



Document 2
Données GPS

- $A(1;0)$
- $B(12;10)$
- $C(16;-5)$.
- $TA = 5$
- $TB = 10$
- $TC = 15$

Exercice n° 22: Chasse au trésor

Le trésor est situé entre les quatre palmiers.

Il est à 65 m de l'un d'eux, à 16 m de celui qui lui est opposé et à 56 m d'un troisième