I. Introduction du chapitre 5
Fonction carré, fonctions du second degré

Exo méthodo n° 1: Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Résoudre les équations suivantes (pour **d**, **e**, **f**, « isoler » d'abord le terme x^2) :

(a) $x^2 = 9$ **(b)** $x^2 = 64$ **(c)** $x^2 = 2$ **(d)** $3x^2 = 12$ **(e)** $-2x^2 = 8$ **(f)** $4x^2 + 3 = 19$.

Exo méthodo n° 2: Exploiter le tableau de variation de la fonction carrée

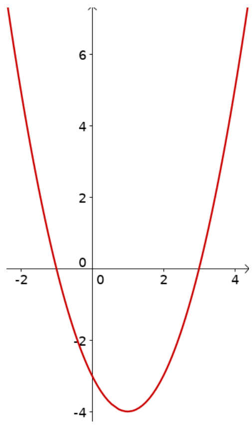
1. À l'aide du tableau de variation de la fonction carré :
   Préliminaire : Dresser le tableau de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$. En déduire :
   (a) le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-8;5]$ par $f(x) = x^2$;
   (b) le tableau de variation de la fonction g définie sur $[-4;3]$ par $g(x) = x^2 + 7$;
   (c) le tableau de variation de la fonction h définie sur $[4;8]$ par $h(x) = x^2 - 3$.
2. Applications : comparaison de carrés. Dans chaque cas, comparer les nombres A et B :
   (a) $A = \left(\frac{-3}{5}\right)^2$ et $B = \left(\frac{-5}{3}\right)^2$ (b) $A = 0,8^2$ et $B = (-0,9)^2$ (c) $A = 1,01^2$ et $B = (-1,009)^2$.
3. Variations : cas général. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 12x + 24$.
   (a) Déterminer les coordonnées $(\alpha;\beta)$ du sommet de la parabole de f. $\left[\alpha = \frac{-b}{2a}\right.$ et $\left.\beta = f(\alpha)\right]$
   (b) Dresser le tableau de variation de f. Calculer la forme canonique de f. $\left[f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta\right]$

Exo méthodo n° 3: Résoudre une inéquation de la forme $x^2 > a$ **ou** $x^2 < a$

Résoudre les inéquations suivantes :

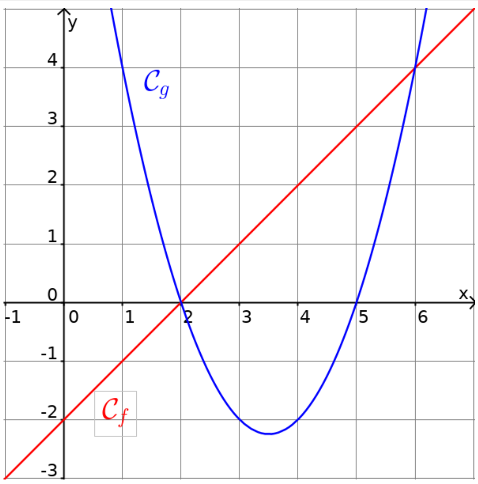
(a) $x^2 < 49$ **(b)** $x^2 \leqslant 3$ **(c)** $5x^2 \geqslant 40$ **(d)** $-7x^2 > 21$ **(e)** $3x^2 + 4 \leqslant 19$.

Exo méthodo n° 4: Exploiter la courbe d'une fonction



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$,
de courbe représentative $\mathscr{C}$ (représentée ci-contre).

1. Justifier que le point $A(-2;5)$ appartient à $\mathscr{C}$.
2. (a) Quelle est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 ?
   (b) Existe-t-il un autre point de $\mathscr{C}$ ayant la même ordonnée que B ?
3. (a) Calculer l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3,5.
   (b) Calculer l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{2}{3}$.
   (c) Calculer l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\sqrt{3}$.

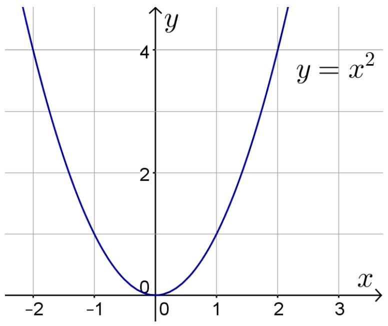


Exo méthodo n° 5: Résolutions graphiques

On a représenté dans le repère ci-contre les courbes de deux fonctions f et g.

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(0)$, $g(1)$, $g(5)$ puis l'image de 6 par g.
2. Résoudre les équations $f(x) = 0$ puis $g(x) = 0$.
3. Résoudre les équations $f(x) = 2$ puis $g(x) = -2$.
4. Résoudre les inéquations $f(x) < -1$ puis $g(x) \geqslant 4$.
5. Résoudre $f(x) = g(x)$ puis $f(x) \geqslant g(x)$.
6. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.



Exercice n° 1: Résolutions graphiques

1. Dans le repère ci-contre, tracer les droites représentatives des fonctions affines suivantes :

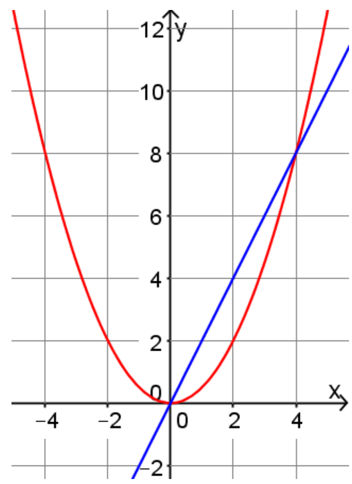
$$f : x \longmapsto x+2 \qquad g : x \longmapsto -0,5x+3 \qquad h : x \longmapsto x.$$

2. Résoudre graphiquement l'équation et les inéquations suivantes :

(a) $x^2 = x+2$ **(b)** $x^2 \leqslant -0,5x+3$ **(c)** $x^2 > x$.

Exercice n° 2: Résolutions graphiques et calculatoire

On a représenté dans le repère ci-contre les courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. La fonction g est la fonction affine.



1. Répondre aux questions suivantes par lectures graphique.
   - **(a)** Déterminer $g(2)$, $f(-4)$ puis l'image de 4 par g.
   - **(b)** Résoudre les équations $f(x) = 8$ et $f(x) = g(x)$.
   - **(c)** Résoudre les inéquations $f(x) \leqslant 2$ et $f(x) < g(x)$.
   - **(d)** Étudier les positions relatives des courbes de f et de g.
2. On donne : $f(x) = 0,5x^2$ et $g(x) = 2x$.
   Résoudre les équations suivantes par le calcul :
   (a) $f(x) = 8$ **(b)** $f(x) = 4,5$ **(c)** $f(x) = g(x)$.

Exo méthodo n° 6: Étudier une fonction à l'aide de la calculatrice

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x - 2$ et $g(x) = x+1$.

1. Dans le menu TABLE entrer les expressions des fonctions f et g.
   Tabuler les fonction f et g de manière à pourvoir compléter le tableau de valeur suivant :

x	$-1,75$	$-1,25$	$-0,75$	$-0,25$	$0,25$	$0,75$
$f(x)$						
$g(x)$						

2. Dans le menu GRAPH, faire afficher les courbes de f et de g.
   Régler la fenêtre graphique avec V-Window : $X_{min} = -5$; $X_{max} = 5$; $Y_{min} = -5$; $Y_{max} = 30$.
3. Déterminer l'image de 3 par f avec les onglets G-Solv puis Y-Cal.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 10$ avec les onglets G-Solv puis X-Cal.
5. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ avec les onglets G-Solv puis ROOT.
6. Déterminer le sommet de la parabole avec les onglets G-Solv puis MIN.
7. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ avec les onglets : G-Solv puis ISCT.
8. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Exo méthodo n° 7: Résoudre une équation produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(2x+1)(3x-4) = 0$
- $(2-3x)(x-5) = 0$
- $x(2x+3) = 0$
- $(3x-5)(2x-1) = 0$
- $(7x-3)^2 = 0$
- $(9x+5)(9x-5) = 0$
- $(5x+4)(x+4) = 0$
- $(x+1)(1-3x) = 0$
- $(-3x+1)(4x-2) = 0$.

Exo méthodo n° 8: Exploiter différentes expressions d'une fonction du second degré

1. Exploiter une forme développée-réduite ax^2+bx+c

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-4x+1$ $[ax^2+bx+c]$.

(a) Calculer l'image de chacun des nombres suivants : 3 ; 0 ; -2 ; $\sqrt{5}$.

(b) Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant f. $[\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)]$
Donner l'axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

(c) Appliquer la formule de la forme canonique de f. $[f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta]$

(d) Dresser le tableau de variation de f.

2. Reprendre les questions **1(a)** à **1(d)** avec : **(a)** $f(x)=-4x^2+24x-5$ **(b)** $f(x)=x^2-x-2$.

3. Exploiter une forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-3(x-1)^2+12$.

(a) Déterminer les coordonnées $(\alpha;\beta)$ du sommet de sa parabole.
En déduire le tableau de variation de f.

(b) Compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il calcule l'image par g du nombre x saisit en entrée.

(c) Calculer la forme développée-réduite de g.

- Entrer un nombre x
- Ajouter .....
- .....
- Multiplier par .....
- ....

4. Reprendre les question **3(a)** à **3(c)** dans les cas suivants :
(a) $g(x)=-3(x-5)^2+2$ **(b)** $g(x)=(x-11)^2$ **(c)** $g(x)=3x^2-9$.

5. Exploiter une forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=7(x-1)(x+5)$.

(a) Déterminer les racines de h. En déduire le tableau de signe de h.

(b) Déterminer les coordonnées $(\alpha;\beta)$ du sommet de la parabole de h.
En déduire le tableau de variation de h ainsi que sa forme canonique.

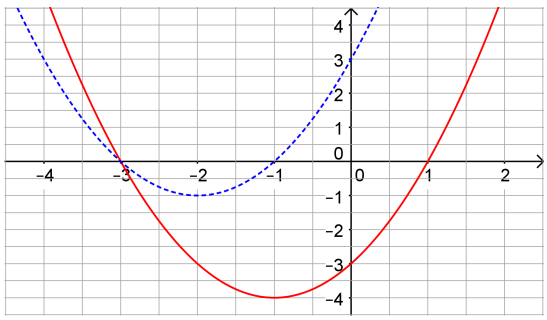
(c) Calculer la forme développée réduite de f.

Exercice n° 3.

Associer une expression à une parabole

Associer chacune des expressions ci-dessous à l'une des deux paraboles ci-contre :

- $A(x)=(x+2)^2-1$
- $B(x)=x^2+2x-3$
- $C(x)=(x+1)^2-4$
- $D(x)=x^2+4x+3$
- $E(x)=(x+1)(x+3)$
- $F(x)=(x-1)(x+3)$.



Exercice n° 4: Avec un algorithme

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'algorithme ci-contre.
Déterminer la forme canonique de f.
En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

- Entrer un nombre x
- Soustraire 2
- Élever au carré
- Multiplier par 3
- Ajouter 4

Exercice n° 5: Utiliser l'axe de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-2x^2+6x-4$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=-4$. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole de f.

2. Dresser le tableau de variation de f puis écrire la forme canonique de f.

3. En déduire la forme factorisée de f puis résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

Exercice n° 6: Choisir la forme adaptée

Voici trois expressions différentes d'une fonction f du second degré, de parabole $\mathscr{P}$:

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 \quad ; \quad f(x) = 2(x+1)(x-3) \quad ; \quad f(x) = 2(x-1)^2 - 8.$$

Choisir la forme adaptée pour répondre à chacune des questions suivantes :

1. En quel point $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?

2. En quel point $\mathscr{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

3. Dresser le tableau de variation de f.

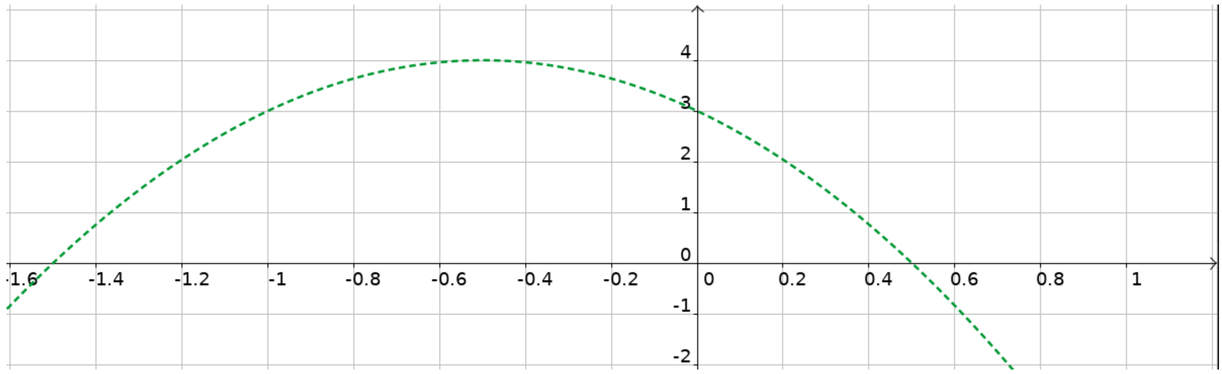
4. Dresser le tableau de signe de f.

5. Quels-sont le(s) points(s) d'ordonnée -6 de $\mathscr{P}$?

6. Quels-sont le(s) points(s) d'ordonnée -8 de $\mathscr{P}$?

Exo méthodo n° 9: Dresser le tableau de signe d'un produit (ou quotient) de fonctions affines

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les courbes représentatives des fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = 1-2x$.



2. La courbe déjà tracée en pointillés est celle de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (2x+3)(1-2x)$.

(a) Comparer le signe des images suivantes : $f(0{,}2)$; $g(0{,}2)$; $h(0{,}2)$ puis $f(0{,}8)$; $g(0{,}8)$; $h(0{,}8)$.

(b) Dresser les tableaux de signe des fonctions affines f et g.

(c) Compléter le tableau suivant pour obtenir le signe de la fonction h :

x	$-\infty$	...	...	$+\infty$
$(1-2x)$		|	...	
$(2x+3)$		...	|	
$(2x+3)(1-2x)$		...	...	

3. En déduire les solutions de l'inéquation $h(x) > 0$.

Exercice n° 7: Tableau de signe

1. Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :

$A(x) = (5x+4)(3x-2)$
$B(x) = (4x-6)(3-5x)$
$C(x) = (5x+5)(x+2)$
$D(x) = x(3x+4)$
$E(x) = (5-8x)^2$
$F(x) = (-x+3)(3x-9)$
$G(x) = -x(14x-7)$
$H(x) = x^2 - 4$
$K(x) = -x(6x+9)$.

2. Pour chaque expression : **(a)** factoriser **(b)** en déduire le tableau de signe.

- $A(x) = (2x+1)(3x+4) - (2x+1)(1-5x)$
- $B(x) = 6x^3 - 3x^2$
- $C(x) = 2(x+5) - x(x+5)$
- $D(x) = (2x+3)^2 - 5(2x+3)$
- $E(x) = 3x(2-x) - 5x$
- $F(x) = (7x-3)^2 + 8x(7x-3)$
- $G(x) = (9x+5)^2 + 9x + 5$
- $H(x) = (5x+4)^2 - 2(x+4)(5x+4)$
- $I(x) = 9x^2 - 25$
- $J(x) = x^2 - 1 + (x+1)(1-3x)$
- $K(x) = 16x^2 - 16x + 4 - (-3x+1)(4x-2)$
- $L(x) = x^2 - 4x + 4$.

Exercice n° 8: Inéquation par tableau de signe

1. Dans cette question, on souhaite résoudre l'inéquation $(3x+1)(1-5x) \leqslant (3x+1)(x-4) \quad (I)$.
   - **(a)** Transformer l'inéquation sous la forme $A(x) \leqslant 0$.
   - **(b)** Factoriser l'expression $A(x)$. En déduire son tableau de signe.
   - **(c)** Conclure en donnant l'ensemble solution de l'inéquation (I).
2. S'inspirer de la démarche de la question **1** pour résoudre les inéquations suivantes :
   - **(a)** $(x-3)(7x+3) \leqslant 2(x-3)(2x-1)$
   - **(b)** $8x^2 < 5x$
   - **(c)** $x^2 - 16 \geqslant 0$
   - **(d)** $(2x+1)^2 > (1-x)^2$
   - **(e)** $(x-5)^2 \geqslant 2(x-5)(x-3)$
   - **(f)** $x^2 - 4x + 4 > (x-2)(7-x)$.

Exercice n° 9: Positions relatives de courbes

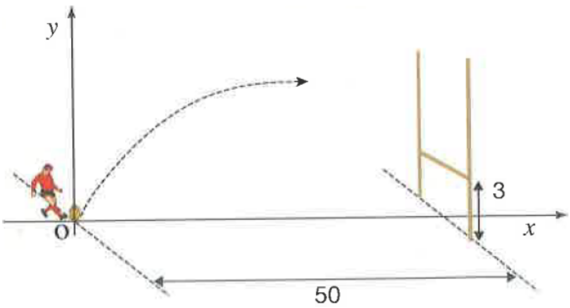
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2$ et $g(x) = (x+1)^2$.

1. **Conjecture avec la calculatrice**
   À l'aide de la calculatrice, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.
2. **Méthode algébrique**
   - **(a)** Factoriser l'expression $f(x) - g(x)$. **(b)** En déduire son tableau de signe.
   - **(c)** Compléter ce tableau avec les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$

Problème n° 1: Tir d'un pénalité

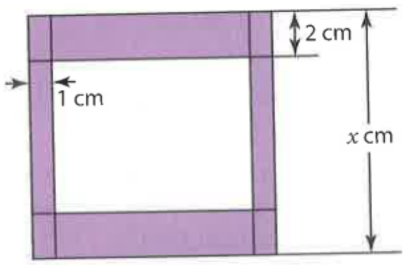
Au moment du coup de pied, le ballon de rugby se trouve au sol, en O, face aux poteaux de pénalité à une distance de 50 m. ***On admet que le ballon suit la courbe d'équation*** $y = -0{,}02x^2 + 1{,}19x$.

Répondre aux questions suivantes en justifiant :



1. La pénalité est ***réussie*** si le ballon passe au dessus de la barre situé à une hauteur de 3 m.
   Le buteur a-t-il marqué la pénalité ?
2. À combien de mètres derrière la ligne de but le ballon est-il retombé à terre ?
3. Jusqu'à quelle hauteur le ballon s'est-il élevé ?

Problème ouvert : Empagement

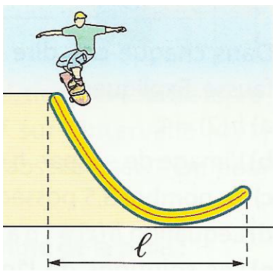


On désire imprimer une carte carrée.

On nomme x la mesure en cm d'un côté de la carte.

On veut laisser sur celle-ci une marge de 2 cm en haut et en bas et une marge de 1 cm à gauche et à droite.

Calculer la longueur du côté puis l'aire de la carte pour que l'empagement soit égal à $168\,\text{cm}^2$.

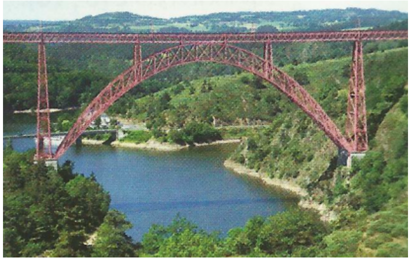


Problème ouvert : Rampe de skate

Ce tremplin a la forme de la parabole de la ***fonction carré*** dans un repère orthonormé (unité : 1 m).

Il est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.

Calculer sa largeur ℓ en mètre (arrondir au centimètre).



Problème n° 2: Architecture d'un viaduc

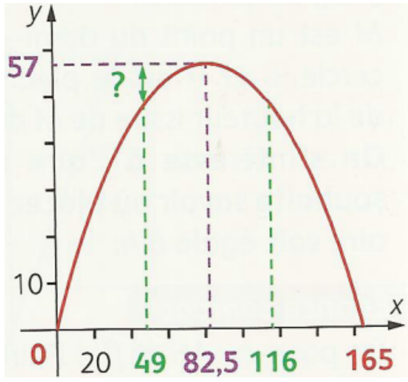
Le viaduc ferrovière de Gabarit est soutenu par une arche parabolique.

Les piles sur lesquelles l'arche est posée sont distantes de 165 m
et le sommet de l'arche est situé à 57 m plus haut que chacune des piles.

On veut calculer la hauteur séparant l'arche du rail au niveau des deux piliers métalliques intermédiaires, situés à 49 m et 116 m de l'entrée gauche du pont, à l'aplomb de la pile.

Pour cela, on modélise la situation à l'aide d'une parabole admettant la courbe représentative ci-contre.

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; 165]$ qui admet cette courbe pour représentation graphique.



1. Justifier que pour tout réel x de I, on a :

$$f(x) = a(x-82,5)^2 + 57$$

où a est un réel fixé.

2. Quel est le signe de a ? Justifier que $a \simeq -0,0084$.

3. En déduire l'image de $f(49)$ puis conclure.

Problème n° 3: Étude d'un bénéfice

Une entreprise fabrique un certain produit **A**. Le coût de production (en euros) de x milliers d'articles s'élève à :

$$C(x) = 2x^2 + 10x + 900 \quad \text{avec} \quad x \in [0; 80].$$

On suppose que tous les articles sont vendus.

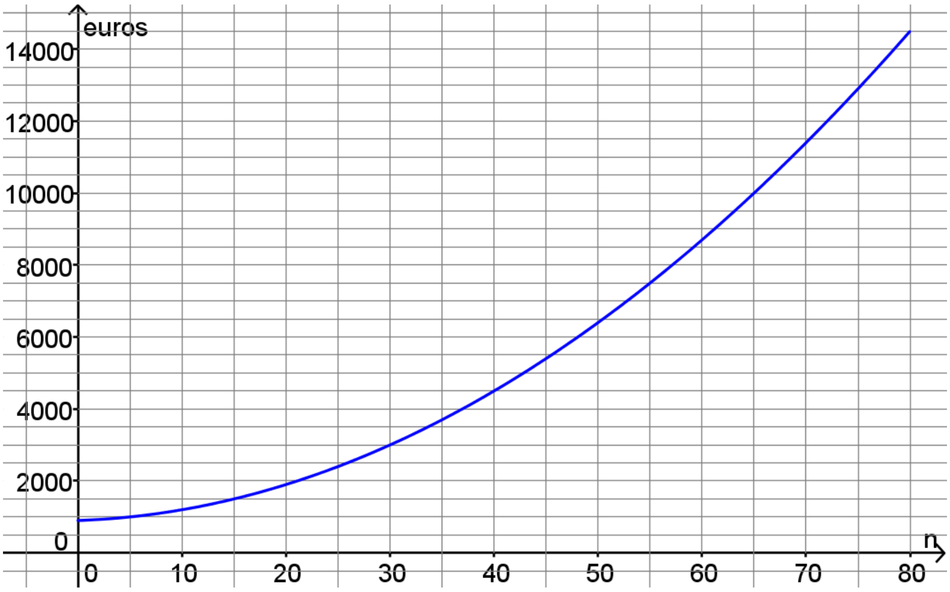
En euros, la recette totale est $R(x) = 120x$ et le bénéfice total est $B(x) = R(x) - C(x)$, pour x milliers d'articles produits et vendus.

1. Calculer le coût de production, la recette et le bénéfice pour 2000 articles produits ; pour 1500 articles.

1. On a représenté ci-contre la courbe de la fonction C sur l'intervalle $[0; 80]$.

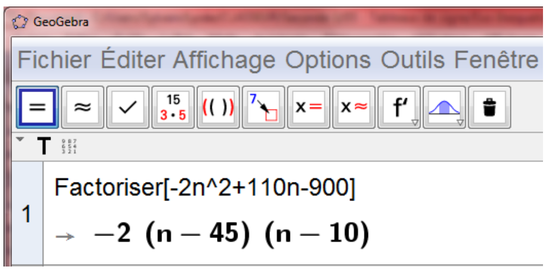
(a) Tracer la courbe de la fonction R.

(b) Par lecture graphique, déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.



2. **(a)** Calculer l'expression réduite de $B(x)$.

(b) La production est rentable lorsque $B(x) > 0$.
Utiliser les informations ci-contre fournies par le logiciel `GeoGebra` pour déterminer les valeurs correspondantes de x.



3. Par le calcul, retrouver l'expression factorisée de $B(x)$ fournie par le logiciel.