

Chapitre 5

Exercices sur la dérivation

Méthodes du chapitre

Méthode n° 1: Calculer un taux de variation, calculer un nombre dérivé (ER1 p97)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^2 + 3$.

- Calculer les images $f(1)$, $f(4)$ puis le taux de variation $\tau = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$. Vérifier que $\tau = \frac{f(1) - f(4)}{1 - 4}$.
- Calcul du nombre dérivé $f'(4)$. Soit h un réel non nul.
 - Exprimer $f(4 + h)$ en fonction de h . Développer puis réduire la différence $f(4 + h) - f(4)$.
 - Simplifier le taux de variation $\tau(h) = \frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$.
 - Faire tendre h vers 0 pour obtenir le nombre dérivé $f'(4)$.

Exercice n° 1: Pour s'exercer

Pour chaque question, s'inspirer de la question 2 de l'exercice précédent pour calculer le nombre dérivé demandé.

- Soit la fonction $\theta : t \mapsto -0,5t^2 + 25$ définie sur $[0; +\infty[$. Déterminer le nombre dérivé $\frac{d\theta}{dt}(100)$.
- Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{5}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
 - Exemple numérique : Calculer le taux de variation $\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2}$.
 - Soit h un nombre réel non nul. Réduire au même dénominateur l'expression $g(3 + h) - g(3)$.
 - Simplifier le taux de variation $\frac{g(3 + h) - g(3)}{h}$. En déduire le nombre dérivé $g'(3)$.
- Soit la fonction $R : x \mapsto \sqrt{3x}$ définie sur $[0; +\infty[$.
 - Exemple numérique : Développer puis réduire $(\sqrt{12} - \sqrt{15})(\sqrt{12} + \sqrt{15})$.
 - Soit h un nombre réel non nul. Exprimer $(R(5 + h) - R(5))(R(5 + h) + R(5))$ en fonction de h .
Développer puis réduire l'expression obtenue. En déduire que $\sqrt{5 + h} - \sqrt{h} = \frac{h}{\sqrt{5 + h} + \sqrt{h}}$.
 - Simplifier le taux de variation $\frac{R(5 + h) - R(5)}{h}$. En déduire le nombre dérivé $R'(5)$.

Méthode n° 3: Déterminer une équation de tangente (ER5 p98)

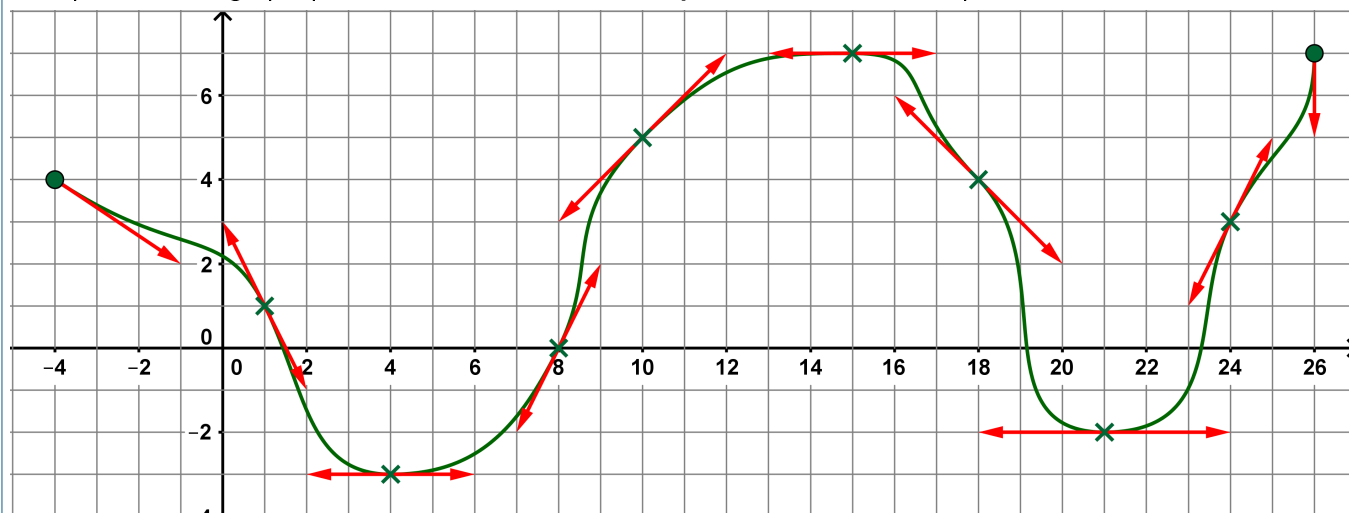
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -7x^2 + 1$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère du plan.
 - Calculer le nombre dérivé $f'(3)$.
 - On note $y = ax + b$ l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3. Que vaut a ?
 - Utiliser les coordonnées d'abscisse 3 pour déterminer b .
 - Le point $M(0,5; 14)$ appartient-il à la tangente étudiée ? Même question pour $N(0,5; 15)$?

Exercice n° 2: Pour s'exercer

- Reprendre chacune des fonction de l'exercice n° 1 et déterminer l'équation réduite de la tangente considérée.
- Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes des exercices « Méthodes n° 2 & n° 4 ».

Méthode n° 2: Déterminer graphiquement un nombre dérivé (ER2 p97)

La représentation graphique C d'une fonction dérivable f est donnée dans le repère ci-dessous.



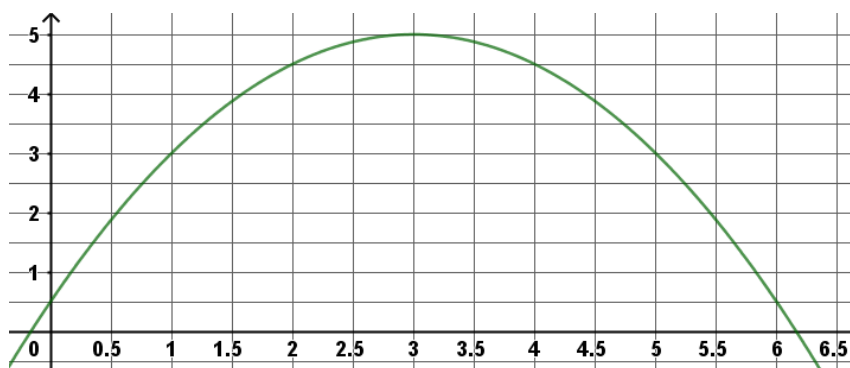
Compléter le tableau de valeurs suivant (page 2).

Abscisse :	x	-4	1	4	8	10	15	18	21	24	26
Image :	$f(x)$										
Nombre dérivé :	$f'(x)$										

Méthode n° 4**Tracer une tangente (ER6 p98)**

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f .

- On donne $f(0) = 0,5$ et $f'(0) = 3$. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- On donne $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
- On donne $f(2) = 4,5$ et $f'(2) = 1$. Tracer la tangente au point d'abscisse 2.
- On donne $f(3) = 5$ et $f'(3) = 0$. Tracer la tangente au point d'abscisse 3.
- On donne $f(5) = 3$ et $f'(5) = -2$. Tracer la tangente au point d'abscisse 5.

**Activité : Introduction à la fonction dérivée**

On reprend la fonction f de l'exercice « **Méthode n° 2** » ci-dessus.

On considère la fonction définie sur $[-4; 26[$ définie par $x \mapsto f'(x)$.

- Pour le nombre dérivée $f'(26)$ n'est-il pas défini ?
- Utiliser le tableau de valeurs de l'exercice « **Méthode n° 2** » pour construire 10 points de la courbe de f' .
- Proposer une courbe possible pour f' .
- Conjecturer le lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f .

Méthode n° 5: Dériver une combinaison linéaire de fonctions (ER9 p99)

Dériver chacune des fonctions données ci-dessous (déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité).

(a) $x \mapsto 5x^3 - 4x^2 + x - 3$

(d) $x \mapsto x^{100} - 4x + 1$

(g) $x \mapsto 0,5x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{x}$

(b) $x \mapsto 1 - 8x$

(e) $x \mapsto \frac{x}{5} - \frac{5}{x}$

(h) $x \mapsto -x^2 - 2\sqrt{x}$

(c) $x \mapsto \frac{18x-12}{6}$

(f) $x \mapsto \frac{x^2}{6} - \frac{6}{x^2}$

(i) $x \mapsto 0,5 \cos x + 0,3 \sin x$

Méthode n° 6: Dériver un produit de fonctions (ER9 p99)

Dériver chacune des fonctions données ci-dessous (déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité).

(a) $x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$

(c) $x \mapsto (x^3 - x)(x^2 - 1)$

(e) $x \mapsto 3x \sin x$

(b) $x \mapsto 5x^2\sqrt{x} + 3$

(d) $x \mapsto (x^2 + 2x + 1)^2$

(f) $x \mapsto x^2 \cos x - 1$

Méthode n° 7: Dériver un quotient de fonctions (ER9 p99)

Dériver chacune des fonctions données ci-dessous (déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité).

(a) $x \mapsto \frac{3x+1}{5x+4}$

(d) $x \mapsto \frac{2x}{1+x-x^2}$

(g) $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

(b) $x \mapsto \frac{2x^2+3}{x+1}$

(e) $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

(h) $x \mapsto \frac{\sin x - 1}{2 - \cos x}$

(c) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

(f) $x \mapsto \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

(i) $\omega \mapsto \frac{R\omega}{1-\omega^2}$

Démonstration de la propriété 4 (iii) : Dérivée d'un produit de fonctions

On considère deux fonctions u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction uv est définie sur $\mathbb{R}$ par : $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$.

1. Soit a un nombre réel et h un réel non nul.

$$\text{Montrer que : } \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} u(a).$$

2. En faisant tendre h vers 0, en déduire que : $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Démonstration de la propriété 4 (iv) : Dérivée d'un quotient de fonctions**1. Dérivée de l'inverse d'une fonction**

On considère une fonction v définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas.

(a) Soit a, h des réels avec $h \neq 0$. Montrer que : $\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h)v(a)}.$

(b) En faisant tendre h vers 0, en déduire que : $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}.$

2. Dérivée d'un quotient de deux fonctions

On considère une deuxième fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

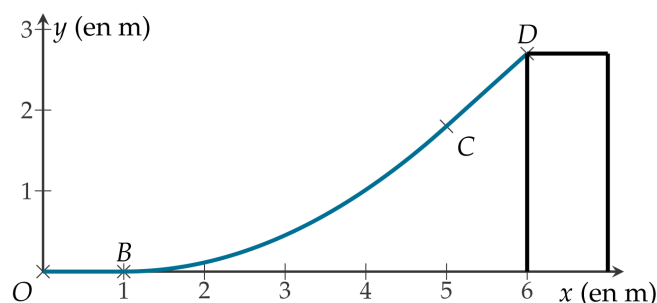
En écrivant $\frac{u}{v}$ sous la forme d'un produit et en utilisant la formule démontrée à l'exercice précédent,

montrer que : $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2}.$

Problèmes d'approfondissement**Exercice n° 3: Problème de raccordement (ouvert)**

Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1 ; 5]$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5 ; 6]$ avec $C(5 ; 1,8)$ et $D(6 ; 2,7)$;
- le raccordement aux points B et C se fait « sans cassure ».



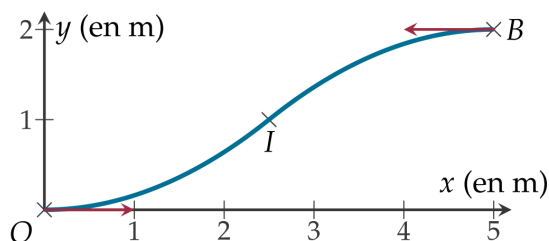
À l'aide des renseignements fournis, déterminer les valeurs de a , b et c .

Exercice n° 4: Raccordement de deux paraboles

Pour faire franchir à des chariots une marche de 2 m de haut sur une distance horizontale de 5 m, on cherche à construire un toboggan, comme représenté ci-contre.

On note I le milieu de $[OB]$. Les arcs $\widehat{OI}$ et $\widehat{IB}$ sont deux arcs de paraboles représentant respectivement deux fonctions f et g .

Sur $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ et sur $\left[\frac{5}{2} ; 5\right]$ on pose $g(x) = dx^2 + ex + f$.



- À l'aide des renseignements fournis par la figure, déterminer les valeurs de a , b et c .
- (a) On souhaite que le raccordement se fasse sans cassure en I . Traduire algébriquement cette information.
(b) Déterminer alors les valeurs de d , e et f .

Exercice n° 5: Notion d'élasticité en Économie

En économie, l'élasticité mesure la variation d'une grandeur provoquée par la variation d'une autre grandeur. Plus précisément, notons :

- q la quantité de biens achetés (demandés) par les consommateurs ;
- p le prix de vente de ces biens. On suppose que, lorsque p varie de p_d à p_a , q varie de q_d à q_a .

L'*élasticité-prix de la demande* est alors : $E = \frac{\frac{q_a - q_d}{q_d}}{\frac{p_a - p_d}{p_d}}$.

- Dans chacun des cas suivants, calculer E :
 - Le prix a baissé de 3 %, la demande a augmenté de 6 %.
 - Le prix a augmenté de 5 %, la demande a baissé de 10 %.
 - La demande a augmenté de 15 %, le prix a augmenté de 5 %.
- Si l'élasticité vaut 4 et que le prix augmente de 2 %, quelle est l'évolution de la demande ?
- On suppose maintenant que la demande évolue en fonction du prix affiché : $q = f(p)$.
 - Démontrer que si le prix varie de p à $p + h$, alors : $E = \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \times \frac{p}{f(p)}$.
 - À quelle condition peut-on faire l'approximation suivante : $E \approx f'(p) \times \frac{p}{f(p)}$?

Exercice n° 6: Limitation de vitesse

Bob parcourt une distance de 260 km sur une autoroute où la vitesse est limitée à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Grâce à son GPS, il dispose d'un relevé régulier de ses coordonnées.

Il a ainsi pu obtenir le graphique ci-contre, représentant la distance parcourue en fonction du temps.

- Bob tient le raisonnement suivant :
« J'ai parcouru les 260 km en 2 h, soit une moyenne de $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Je ne recevrai donc pas d'amende ».
Que penser de son raisonnement ?
- Graphiquement
 - À quel(s) moment(s) la vitesse de Bob était-elle la plus grande ?
 - À quel(s) moment(s) la vitesse de Bob était-elle la plus petite ?
 - À quel(s) moment(s) Bob roulait-il à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

