Exercices de synthèse sur le chapitre 3
Suites numériques

Appliquer les méthodes

Exercice n° 1: Démontrer qu'une suite est arithmétique

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{3n^2 + 8n + 4}{n+2}$.

(a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique, dont on donnera la raison et le premier terme.

(b) À partir de quel rang n a-t-on $u_n \geqslant 100$?

(c) Calculer la somme $u_2 + u_3 + \cdots + u_9$.

Exercice n° 2: Placement avec intérêts simples

Début 2022, on place 350 €, au taux annuel de $3,5\,\%$, avec intérêts simples, ce qui signifie que, chaque année, on recevra une somme fixe s'élevant à $3,5\,\%$ du capital initial.

1. Calculer la somme d'argent reçue chaque année.
2. On note $C_0 = 350$ le capital initial et, pour tout entier naturel n, C_n le capital obtenu après n années.
   (a) Calculer C_1 et interpréter le résultat.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer C_n en fonction de n.
3. À partir de quelle année le capital total dépassera-t-il $1\,000$ € ?

Exercice n° 3: Somme d'une suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_9 = 4$ et $u_{15} = 2$.

1. Déterminer la raison de (u_n) ainsi que u_0.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0$.
3. Calculer la somme $S = u_{10} + u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{19} + u_{20}$.

Exercice n° 4: Démontrer qu'une suite est géométrique

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{5 \times 7^n}{6^n}$.

(1). Montrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on donnera la raison et le premier terme.

(2). Calculer la somme $u_4 + u_5 + \cdots + u_{10}$.

Exercice n° 5: Placement avec intérêts composés

Début 2022, on place 350 €, au taux annuel de $5\,\%$, avec intérêts composés, ce qui signifie que, au début de chaque année, on touchera une somme d'argent s'élevant à $5\,\%$ du capital déjà acquis.
Pour tout entier naturel n, C_n le capital obtenu après n années. Ainsi, $C_0 = 350$.

1. Calculer C_1 et interpréter le résultat.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer C_n en fonction de n.
4. Utiliser la calculatrice pour déterminer à partir de quelle année le capital dépassera $1\,500$ €.

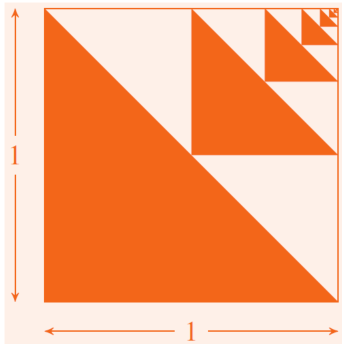
Exercice n° 6: Somme d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique telle que $u_4 = 5$ et $u_7 = 135$.

1. Déterminer la raison de (u_n) ainsi que u_0.
2. Calculer la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$.

Problèmes de nature géométrique

Problème n° 1: Suite de triangles inscrits



Le carré ci-contre à pour côté 1.

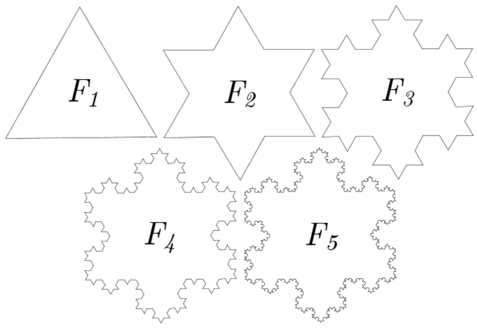
On construit une suite de triangles comme indiqué sur la figure.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note T_n l'aire du n-ième triangle construit.

On a donc $T_1 = 0,5$.

1. Calculer T_2 et T_3.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer T_n en fonction de n.
3. Déterminer la nature de la suite (T_n) et préciser sa raison.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer la somme $T_1 + \cdots + T_n$ en fonction de n.

Problème n° 2: Flocon de Von Koch



On construit une suite de polygones réguliers comme indiqué ci-contre.

Le triangle équilatéral F_1 a pour côté 1.

1. Longueur des côtés

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note ℓ_n la longueur d'un côté du polygone F_n. Ainsi $\ell_1 = 1$.

   (a) Donner ℓ_2 et ℓ_3.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n.
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer ℓ_n en fonction de n.

2. Nombre des côtés

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de côtés du polygone F_n. Ainsi $c_1 = 3$.

   (a) Donner c_2 et c_3.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer c_n en fonction de n.

3. Suite des périmètres

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note p_n le périmètre du polygone F_n. Ainsi $p_1 = 3$.

   (a) Donner p_2 et p_3.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer p_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que (p_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

4. Suite des aires

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n l'aire du polygone F_n.

   (a) Calculer a_1 et a_2.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer a_n en fonction de n.