

Cours du chapitre 2

Fonctions trigonométriques

1 Enroulement sur le cercle trigonométrique

A. Le cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Définition 1. Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O , de rayon 1 et orienté dans le sens direct (par convention, le sens inverse des aiguilles d'une montre).

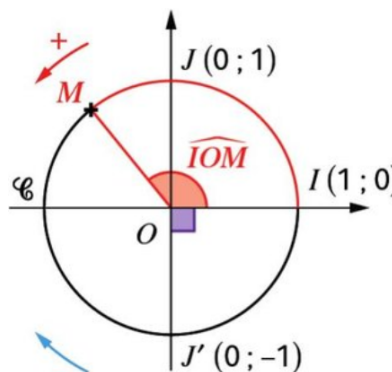
Remarques

- Il existe deux sens de parcours pour un point M sur $\mathcal{C}$:
 - * le sens direct (noté $+$) ou sens trigonométrique ;
 - * le sens indirect (noté $-$) ou sens rétrograde.
- Périmètre de $\mathcal{C}$: $\mathcal{P} = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
- La longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ (parcouru dans le sens direct) est proportionnelle à la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$ qui l'intercepte :

Longueur de l'arc	2π						$\widehat{IM}$
Mesure d'angle en degré	360°	180°	90°	60°	45°	30°	$\widehat{IOM}$

Pour tout point M de $\mathcal{C}$, $\widehat{IM} = \frac{\pi}{180} \times \widehat{IOM}$ et $\widehat{IOM} =$

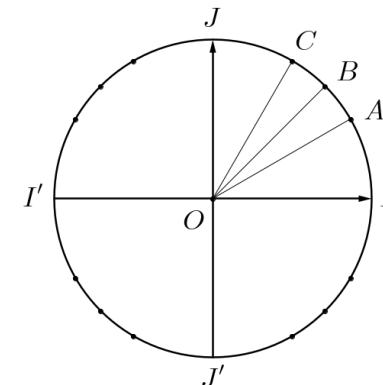
Les fonctions $\widehat{IOM} \mapsto \widehat{IM}$ et $\widehat{IM} \mapsto \widehat{IOM}$ sont linéaires.



M1 : Placer un point sur le cercle trigonométrique (ER2 p169)

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, les points A, B, C sont tels que :

$$\widehat{IOA} = 30^\circ, \widehat{IOB} = 45^\circ \text{ et } \widehat{IOC} = 60^\circ.$$



- Calculer les longueurs des arcs de cercles suivants :

- $\widehat{IJ} =$
- $\widehat{IA} =$
- $\widehat{IB} =$
- $\widehat{IC} =$

★ La suite de l'exercice utilise les propriétés de la page 2.

- Placer sur le cercle les points suivants :

- A_1 image de $\frac{5\pi}{6}$
- A_2 image de $-\frac{\pi}{6}$
- B_1 image de $\frac{3\pi}{4}$
- B_2 image de $-\frac{\pi}{4}$
- C_1 image de $\frac{2\pi}{3}$
- C_2 image de $-\frac{\pi}{3}$

- Reconnaître les points associés aux réels suivants :

- $\frac{11\pi}{6}$
- $-\frac{11\pi}{3}$
- $\frac{13\pi}{4}$
- $-\frac{13\pi}{4}$

- Placer sur le cercle les points A_3, B_3, C_3 , symétriques respectifs de A, B, C par rapport à O puis donner les réels associés.

> Exercice 4 p169

B. Enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique

Dans ce paragraphe, on considère :

- Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et sa tangente T au point $I(1;0)$. Cette droite (d'équation $x = 1$) sera appelée *droite des réels*.
- Les points $A(1;1)$ et $A'(1;-1)$ de T .

On « enroule » la droite T autour de $\mathcal{C}$:

- la demi-droite $[IA)$ s'enroule sur $\mathcal{C}$ dans le sens direct ;
- la demi-droite $[IA')$ s'enroule sur $\mathcal{C}$ dans le sens indirect.

Définition 2. Point image d'un réel sur le cercle trigonométrique

À tout nombre réel x , on associe le point N de T de coordonnées $(1; x)$.
Le point N se superpose, par enroulement, sur un unique point M de $\mathcal{C}$.
Le point M est appelé (point) image de x par enroulement (de l'axe des réels autour du cercle trigonométrique).

Réciproquement :

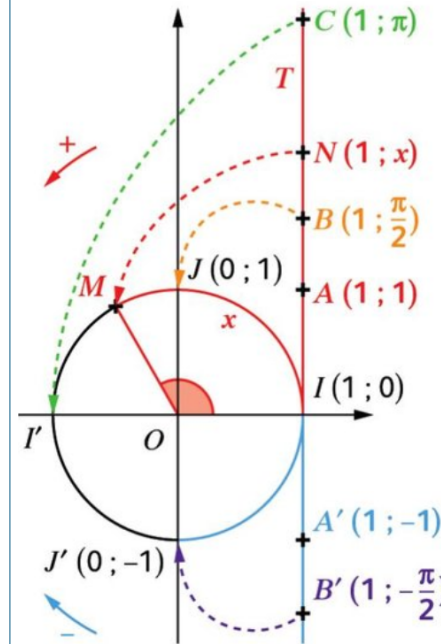
- Tout point M de $\mathcal{C}$ est l'image d'un certain nombre réel x :
 x est égal à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$, parcouru dans le sens direct.
- M est aussi l'image de tous les réels de la forme $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et seulement ceux-là.
- La valeur absolue $|k|$ correspond au nombre de « tours » supplémentaires (dans le sens direct si $k \geq 0$, dans le sens indirect si $k \leq 0$) qu'on doit parcourir $\mathcal{C}$ de l'image de x à celle de $x + 2k\pi$ (c.a.d. M !).

Définition 3. Mesure d'angle en radian

Soit M un point du cercle trigonométrique, image d'un certain nombre réel x par enroulement. On dit que x est une *mesure en radian* de l'angle au centre $\widehat{IOM}$, orienté de I vers M . Les autres mesures $\widehat{IOM}$ de sont les réels de la forme $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, et seulement ceux-là. Le seul de ces réels qui appartient à $] -\pi; \pi]$ est appelé *mesure principale* de $\widehat{IOM}$.

Illustration de la définition 2

Enroulement de l'axe des réels autour du cercle trigonométrique



- $B(1; \frac{\pi}{2})$ est associé au réel $\frac{\pi}{2}$.
 - B vient se superposer sur
 - Point image de $\frac{\pi}{2}$:
 - Longueur de l'arc $\widehat{IJ}$:
- $B'(1; -\frac{\pi}{2})$ est associé au réel $-\frac{\pi}{2}$.
 - B' vient se superposer sur
 - Point image de $-\frac{\pi}{2}$:
 - Longueur de l'arc $\widehat{IJ'}$:
- Le réel $\frac{7\pi}{2}$ a aussi pour image J' car :

$$\frac{7\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) =$$
 donc $\frac{7\pi}{2} = (-\frac{\pi}{2}) +$

$\frac{7\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont deux mesures en radian de l'angle orienté $\widehat{IOJ'}$.

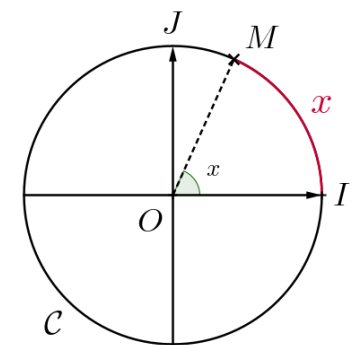
Proportionnalité degré/radian

Si $x \in [0; \pi]$, la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ le long du cercle trigonométrique. Cette longueur est proportionnelle à la mesure en degré de $\widehat{IOM}$.

Mesure en radian	π	x
Mesure en degré	180°	θ

$x =$ soit $\theta =$

- Exemples : *
- $x = \frac{2\pi}{5}$ rad correspond à $\theta =$
 - $\theta = 15^\circ$ correspond à $x =$



2 Cosinus et sinus d'un nombre réels

Dans ce paragraphe, on considère un cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Définition 4. Sinus et cosinus d'un nombre réel

Soient x un réel et M son point image sur $\mathcal{C}$ par enroulement.

- L'abscisse de M dans le repère $(O; I; J)$ est le **cosinus du réel x** et est noté $\cos(x)$ ou $\cos x$.
- L'ordonnée de M dans le repère $(O; I; J)$ est le **sinus du réel x** et est noté $\sin(x)$ ou $\sin x$.

À retenir : Les coordonnées de M dans $(O; I; J)$ sont donc $(\cos x; \sin x)$.

Propriété 1. Propriétés immédiates

Pour tout nombre réel x , on a :

- Encadrements : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Conséquence du théorème de Pythagore : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Notations fonctionnelles : $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Propriété 2. Valeurs remarquables des cosinus et sinus

Angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Réel x dans $[0; \pi]$ associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \widehat{IOM} = \cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \widehat{IOM} = \sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration : Activité n° 4 de la fiche d'introduction.

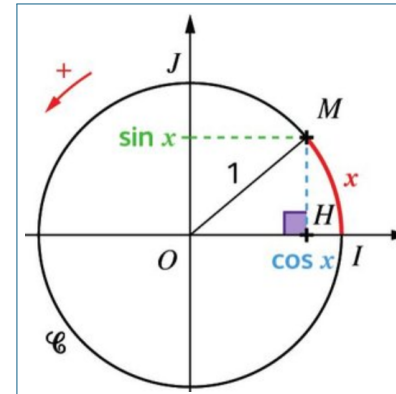


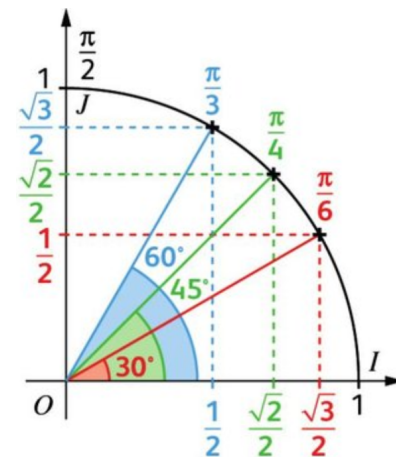
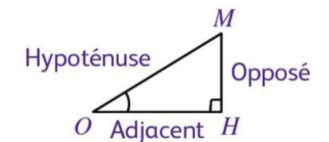
Illustration de la définition 4

- Le nombre réel 0 a pour image $I(1; 0)$ donc : $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
- Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour image $J(0; 1)$ donc : $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

La **définition 4** est cohérente et prolonge la définition des rapports trigonométriques d'un angle dans un triangle rectangle.

Ainsi, lorsque l'angle $\widehat{IOM}$ est aigu, dans le triangle OHM rectangle en H :

- $\cos \widehat{IOM} = \cos \widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = OH = \cos x$
- $\sin \widehat{IOM} = \sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} = HM = \sin x$



M2 : Déterminer des cosinus et des sinus

(ER6 p170)

1. Construire un repère orthonormé $(O; I; J)$ et le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé (unité graphique : 5 cm).
2. Placer l'image sur $\mathcal{C}$ des réels suivants : $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$.
3. Déterminer le cosinus et le sinus de ces réels.

4. Calculer le sinus et le cosinus des nombres réels suivants :

$$\frac{9\pi}{4} ; \frac{35\pi}{6} ; -\frac{25\pi}{3} ; \frac{2023\pi}{6}.$$

3 Fonctions trigonométriques

Définition 5. Fonctions trigonométriques

- La fonction *cosinus* est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos x$.
- La fonction *sinus* est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin x$.

Les fonctions cosinus et sinus sont à valeurs dans $[-1; 1]$.

Propriété 3. Parité

- La fonction cosinus est *paire*, ce qui signifie que :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
- La fonction sinus est *impaire*, ce qui signifie que :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les points images de x et de $(-x)$ par l'enroulement sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ces points ont donc des abscisses égales et des ordonnées opposées.

Propriété 4. Périodicité

Les fonctions cosinus et sinus sont *périodiques* de période 2π , ce qui signifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Démonstration : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les points images de x et de $(x + 2\pi)$ par l'enroulement sont confondus. Ils ont donc les mêmes coordonnées.

Propriété 5. Variations et courbe de la fonction cosinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	0	-1

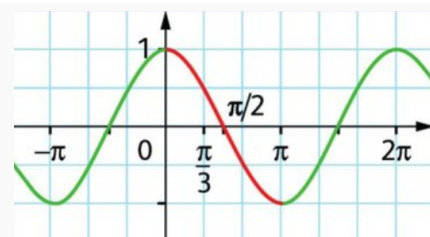
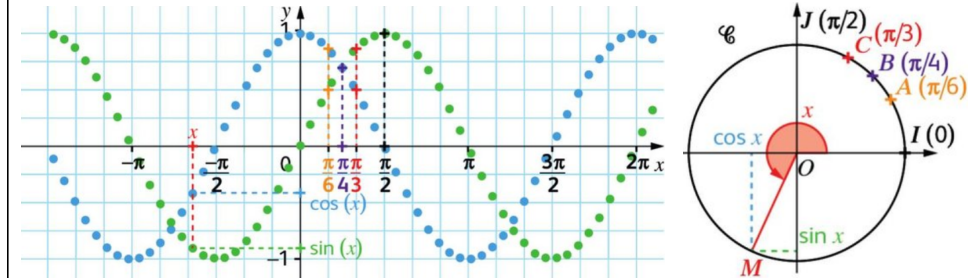


Illustration de la définition 5

Le parcours d'un point $M(\cos x; \sin x)$ sur le cercle trigonométrique permet de construire, point par point, les courbes représentatives des fonctions cos et sin.



Interprétation graphique de la parité et de la périodicité

- La courbe représentative de la fonction cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et invariante par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.
- La courbe représentative de la fonction sin est symétrique par rapport à l'origine du repère et invariante par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.

Variations et courbe de la fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

M3 : Étudier les fonctions cos et sin

- Dresser les tableaux de variation et de signe des fonctions cos et sin sur $[-\pi; 0]$.
- Comparer : (a) $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{7}$ (b) $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{7}$ (c) $\sin \frac{3\pi}{5}$ et $\sin \frac{4\pi}{7}$.
- Sur quels intervalles de $[0; 2\pi]$ les fonctions cos et sin sont-elles de même signe? Justifier.

