Cours du chapitre 1
Second degré

1 Fonctions polynômes du second degré

Dans ce paragraphe, a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Définition 2 : Fonction trinôme de degré 2

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax^2+bx+c \end{cases}$

est appelée *fonction trinôme* (ou *polynôme*) *du second degré*.

L'expression ax^2+bx+c est la *forme développée réduite* de f.

Définition 2 : Racine

Soit f une fonction polynôme de degré 2.

On appelle racine de f tout nombre réel x_1 tel que $f(x_1)=0$.

Autrement dit, une racine de f est une solution de l'équation $f(x)=0$.

Propriété 1 : Forme factorisée

Soient $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ et un nombre réel x_1.

x_1 est racine de f si, et seulement s'il existe un nombre réel x_2 tel que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\quad f(x)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Les racines de f sont alors x_1 et x_2 (éventuellement égales).

Rappel : Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Illustration des définitions et propriétés

Soit la fonction $f : x \longmapsto 4x^2+10x-6$ définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 1 : f est une fonction polynôme de degré 2 avec :

- $a=$ ..... est son *coefficient dominant* (ou *coefficient de degré* 2) ;
- $b=$ ..... est son *coefficient de degré* 1 ;
- $c=$ ..... est son *terme constant* (ou *coefficient de degré* 0).

Les fonctions $x \mapsto 4x^2$, $x \mapsto 10x$, et $x \mapsto -6$ sont appelées *monômes* (de degrés respectifs 2, 1 et 0).

Définition 2 : f admet deux racines distinctes :

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=$ .....
- $f(-3)=$ ......

Propriété 1 : Les racines de f sont $\frac{1}{2}$ et -3 donc :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x)=$ .....

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont ainsi $\frac{1}{2}$ et -3.

M1 : Se ramener à la forme factorisée (> ER1 p71, ER6 p72)

Dans chaque cas, déterminer la forme factorisée et les racines de f.

1. $f(x)=3x^2-4x$

2. $f(x)=4x^2+4x+1$

3. Les racines de f sont -3 et 5 et $f(0)=-15$.

Voir les exercices 3 page 71 et 9, 10, 11 page 72

2 Résolution d'une équation du 2nd degré

On considère une fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Propriété 2 : Forme canonique

Il existe deux nombres réels α et β tels que :

Pour tout réel x, $f(x) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$.

Définition 3 : Discriminant

Le *discriminant* de f est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Le discriminant permet de connaître le nombre de racines de f et de les calculer, lorsqu'il y en a.

Propriété 3 : Calcul des racines

- Si $\Delta > 0$ alors f admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}.$$
- Si $\Delta = 0$ alors f admet une seule racine : $x_0 = -\dfrac{b}{2\,a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas de racine réelle.

Propriété 4 : Forme factorisée

- Si $\Delta > 0$ alors, pour tout réel x, $f(x) = a\,(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de f.
- Si $\Delta = 0$ alors, pour tout réel x, $f(x) = a\,(x-x_0)^2$, où x_0 est l'unique racine de f.
- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ ne peut pas se factoriser en produit de deux fonctions affines.

Calcul pratique de la forme canonique

Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 12x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

- On factorise les termes de degrés 1 et 2 par $a = ...$:
$$f(x) = 3(..................) + 1.$$
- On reconnaît dans $x^2 - 4x$ le début du développement
$$(x-2)^2 = ..., \quad \text{donc} \quad (x-2)^2 - 4 = ...$$
- Ainsi :

  $f(x) = ...$

M2 : Résoudre une équation du second degré (> ER5 p72)

Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 - 3x + 2 = 0$
- $x^2 - x = 6$
- $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$
- $-1,8x^2 + 4,1x - 1 = 0$

Voir les exercices 7, 8 page 72

3 Variations et courbe représentative

On considère une fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, que l'on écrit sous forme canonique :

$$f(x) = a\left(x-\alpha\right)^2+\beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Propriété 5 : Sens de variation

Le sens de variation de f dépend du signe de a :

Cas $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

β est le *minimum* de f.
Il est atteint en $x = \alpha$.

Cas $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

β est le *maximum* de f.
Il est atteint en $x = \alpha$.

Propriété 6 : Courbe représentative

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est la *parabole* d'équation $y = ax^2+bx+c$.

- Le point $S(\alpha;\beta)$ le *sommet* de cette parabole.
- La droite d'équation $x = \alpha$ est l'axe de symétrie de cette parabole.

Remarque : Si deux réels x_1 et x_2 ont la même image par f alors, par symétrie, on a : $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Propriété 7 : Position relative par rapport aux axes du repère

La parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$:

- coupe l'axe des ordonnées au point $C(0;c)$;
- coupe l'axe des abscisses si et seulement si f admet des racines.

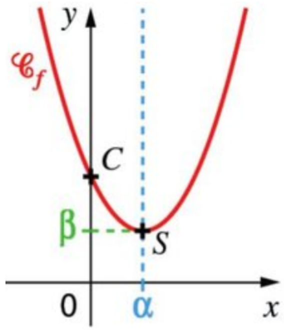
M3 : Construire l'allure d'une parabole (> ER2 p71)

Dans chaque cas, construire l'allure de la parabole $\mathcal{P}$ représentant f, après avoir déterminé :

- l'orientation de $\mathcal{P}$;
- l'axe de symétrie et le sommet de $\mathcal{P}$;
- les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes du repère.

(a) $f(x) = -3(x+5)^2+1$; **(c)** $f(x) = x^2+x+1$;
(b) $f(x) = (3x+9)(3-5x)$; **(d)** $f(x) = 4x^2-8x+4$.

Cas $a > 0$:
La parabole est ouverte vers le haut.



Cas $a < 0$:
La parabole est ouverte vers le bas.

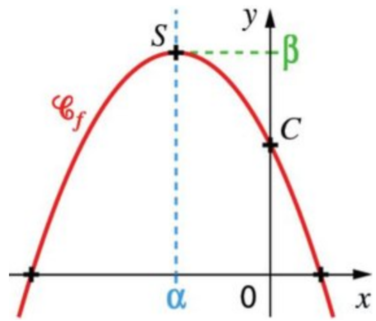
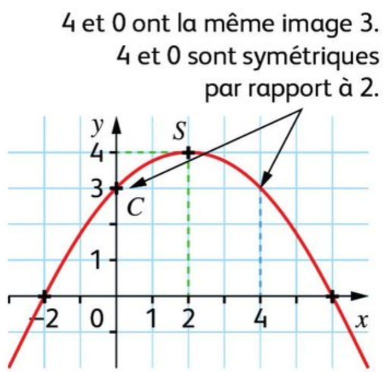


Illustration des propriétés 6 et 7 (méthode alternative)

Soit $f : x \longmapsto -\frac{1}{4}x^2+x+3$.

- $f(0) = 3$ donc $C(0;3) \in \mathcal{C}_f$.
- $f(x) = 3 \iff -\frac{1}{4}x^2+x+3 = 3$
  $\iff -\frac{1}{4}x^2+x = 0$
  $\iff \left(-\frac{1}{4}x+1\right)x = 0$
  $\iff x = 4$ ou $x = 0$.

Donc $\alpha = \dfrac{0+4}{2} = 2$ et $\beta = f(2) = 4$.



Conclusion :
$S(2;4)$ et $x = 2$ est l'axe de symétrie.

4 Facorisation et signe de $ax^2 + bx + c$

On considère une fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, et on note $\mathcal{P}$ la parabole représentant f dans un repère orthogonal.

- Étudier le signe de f, c'est déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positive, négative ou nulle.
- Graphiquement, cela revient à étudier la position de $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses.

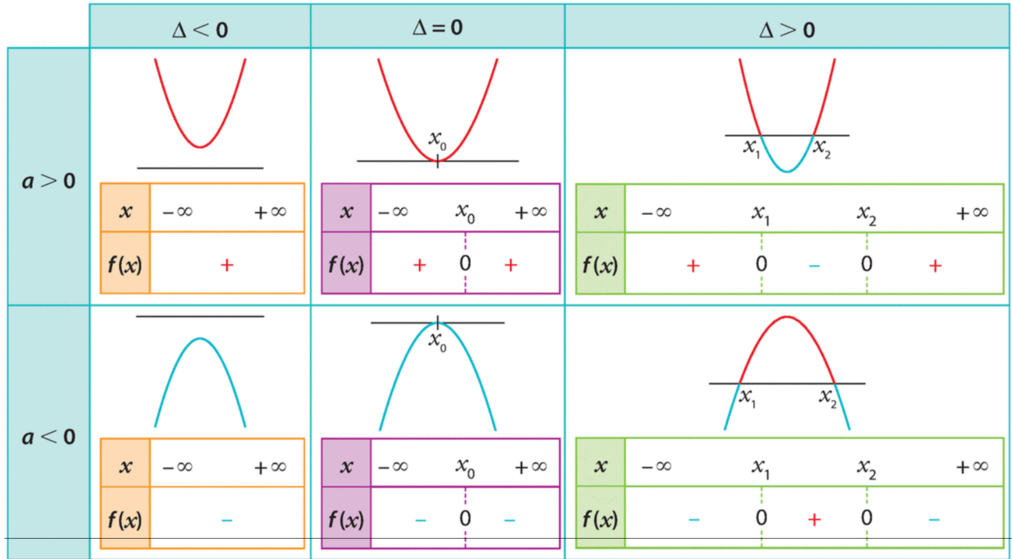
Propriété 8 : Signe

Le signe de f dépend des signes de Δ et de a :

- Si $\Delta > 0$ alors f s'annule en x_1 et x_2 (disons $x_1 < x_2$) et admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		**signe de** a	0	**signe de** $(-a)$	0	**signe de** a	

- Si $\Delta = 0$ alors f s'annule son unique racine x_0 et est du signe de a sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$.
- Si $\Delta < 0$ alors f est de signe constant : celui de a.



M4 : Étudier le signe d'une fonction polynôme du 2nd degré (> ER12 p73)

Dresser le tableau de signe de $f : x \longmapsto 2x^2 - 10x + 12$.

Voir l'exercice 14 page 73

M5 : Résoudre une inéquation du second degré (> ER13 p73)

Résoudre l'inéquation $10x^2 + 4x - 4 \geqslant x^2 - 20x - 20$.

Voir l'exercice 15 page 73