Activités du chapitre 1

Fonctions affines et équations du premier degré

Activités d'introduction

Activité n° 1: Tarifs de locations

Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques :

- **Agence A :** forfait de 40€ plus 0,50€ par km ;
- **Agence B :** forfait de 50€ plus 0,42€ par km.

1. Quelle est l'agence la plus économique pour un parcourt de 50 km ? de 300 km ?

2. On note $A(x)$ le prix à payer, en euros, pour x km parcourus avec l'**Agence A**.

(a) *Exprimer* $A(x)$ en fonction de x.

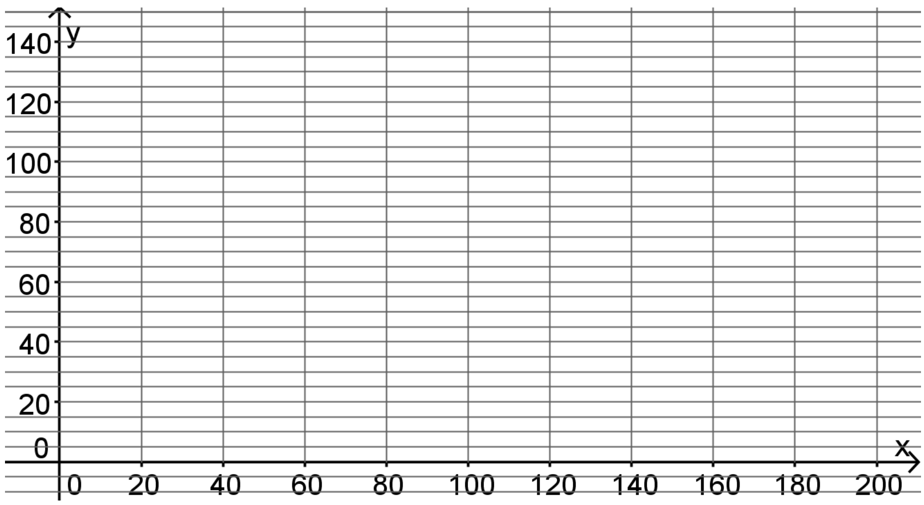
(b) Quelle distance peut-on parcourir avec l'Agence A et 50€ ?

(c) Compléter le *tableau de valeurs* ci-contre :

x distance parcourue (en km)	50	100	150	200	250	300
$A(x)$ tarif (en euros)						

(c) Dans le repère ci-contre, représenter la fonction

$$A : x \longmapsto A(x).$$



3. Reprendre les questions

2(a), **2(b)**, **2(c)**

avec la fonction B donnant les tarifs pour l'**Agence** B.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x les deux agences ont-elles le même coût ?
Répondre cette la question :

(a) par lecture graphique ;

(b) par le calcul.

Activité n° 2: Conversion de températures

Les britanniques utilisent le *degré Fahrenheit* comme unité de mesure de température, alors qu'en France, on utilise le *degré Celsius*. La température T_F en degré Fahrenheit s'écrit *en fonction* de la température T_c en degré Celsius de la manière suivante : $T_F = 1,8T_C + 32$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

T_C	-50		-10		35		100
T_F		-13		59		$161,6$	

2. Compléter les algorithmes ci-contre.
Celui de gauche doit renvoyer en *sortie* la température en degrés Fahrenheit à partir de la température en degrés Celsius donnée en *entrée*. Celui de droite doit traiter le calcul *réciproque*.

$C \longleftarrow ?$
$F \longleftarrow \ldots\ldots$
Afficher F

$F \longleftarrow ?$
$C \longleftarrow \ldots\ldots$
Afficher C

3. (a) Dans le repère de la page suivante, construire la représentation graphique de la fonction g qui, à la température exprimée en degré Celcius, associe la température en degré Fahrenheit ($g : T_C \longmapsto T_F$).

(b) À quoi correspond le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ?

(c) Si la température augmente de $1°$C, de combien de degrés Fahrenheit augmente-t-elle ?

4. Pour les questions suivantes, *conjecturer* la réponse par lecture graphique puis *démontrer* le résultat.

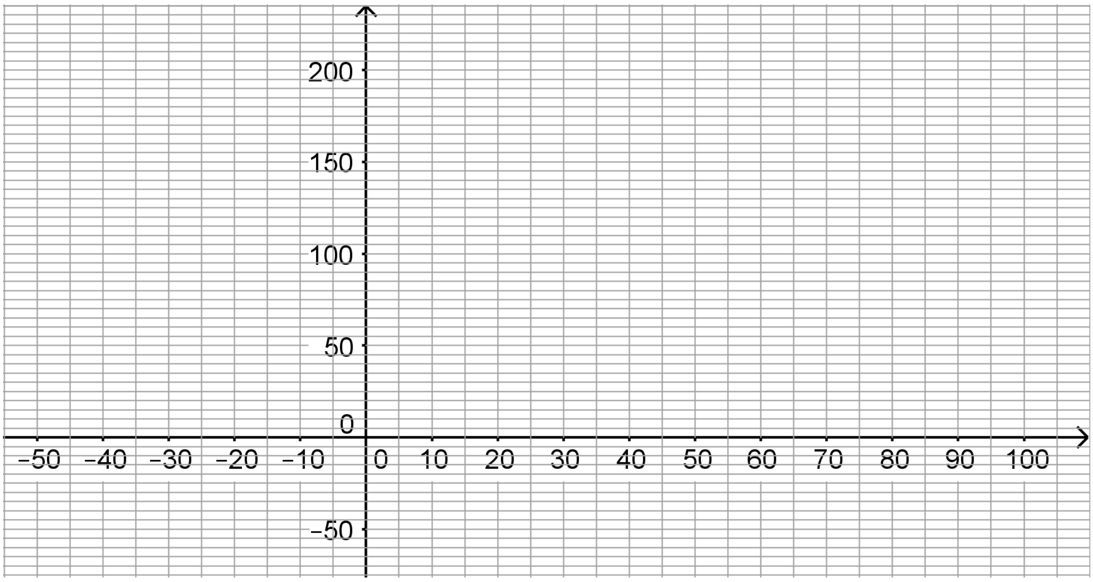
(a) On dit parfois : « Ce malade a $40°$C de fièvre ». Que dirait un britannique ?

(b) À quelle température en degrés Celsius correspond celle de 100 degrés Frahrenheit ?

(c) Quel est, en degrés Farhenheit, la température pour laquelle l'eau gèle ? l'eau bout ?

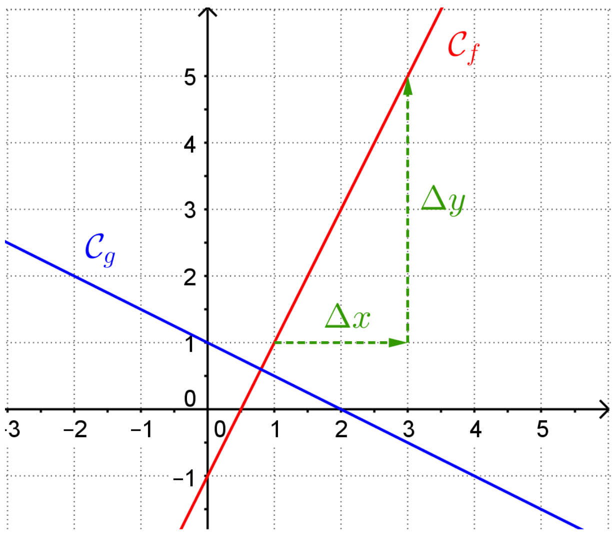
(d) Dans le grand Nord canadien, lors d'une expédition internationale, deux explorateurs constatent que leurs thermomètres, l'un gradué en degrés Farhenheit et l'autre en degrés Celsius, affichent le même résultat.

Quelle est la température ce jour-là ?



Activité n° 3: Représentation graphique d'une fonction affine

Sur la figure suivante, on a représenté la courbe de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 1$.



1. **(a)** Sur la figure, placer les points

$$A(1; f(1)) \text{ et } B(3; f(3)).$$

(b) On considère les *accroissements*

$$\Delta x = 3 - 1 \quad \text{et} \quad \Delta y = f(3) - f(1).$$

Calculer le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Que remarque-t-on ?

(c) Placer le point $C(0; f(0))$. Que remarque-t-on ?

2. On pose $g(x) = ax + b$, où g est la seconde fonction représentée sur la figure.

S'inspirer de la démarche de la question **1** pour déterminer les coefficients a et b.

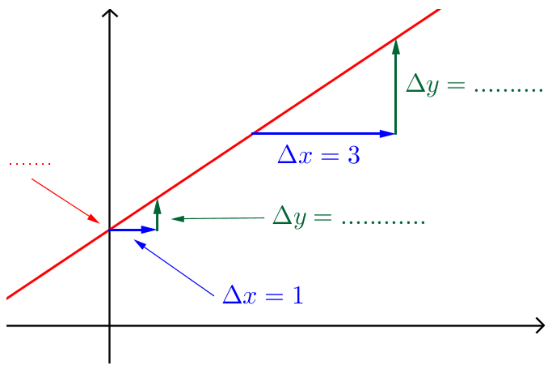
3. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x + 1$ et $k(x) = -3x + 4$.

Sans calcul, tracer les courbes représentatives de ces deux fonctions (dans le repère ci-dessus).

4. **Synthèse**

On considère la fonction affine ℓ définie par : $\ell(x) = \dfrac{2}{3}x + 1$.

Compléter le schéma ci-contre :



5. Donner le sens de variation de chacune des fonctions f, g, h, k et ℓ de l'exercice en faisant le lien avec leurs coefficients directeurs.

Savoir-faire

Savoir-faire n° 1: Équation du premier degré

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 3$.

1. Résoudre les équations suivantes : **(a)** $f(x) = 0$; **(b)** $f(x) = -4$; **(c)** $f(x) = \frac{3}{2}$.
2. Reprendre les questions **1(a)** à **1(c)** avec $g(x) = 7x + 1$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

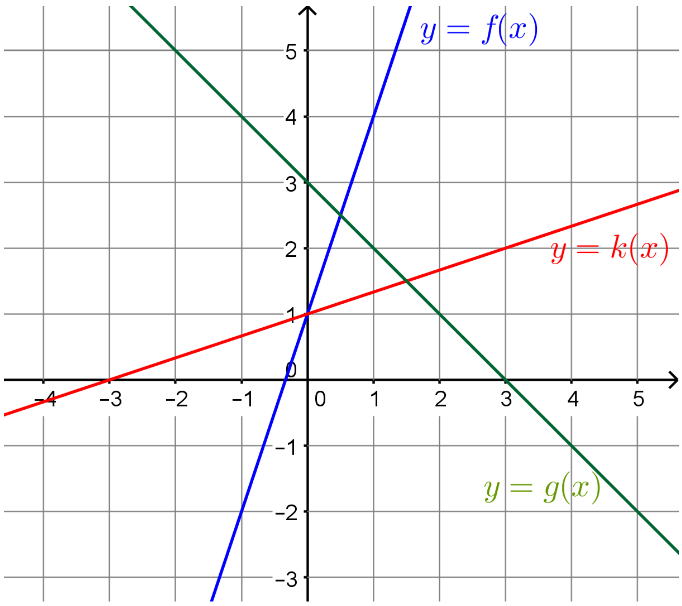
Pour s'exercer : Reprendre les questions de l'exercice avec $f(x) = -8x + 3$ et $g(x) = 4x - 1$.

Savoir-faire n° 2: Représentation graphique

Dans le repère ci-contre, on a représenté graphiquement trois fonctions affines f, g, h.

Répondre aux questions par lecture graphique.

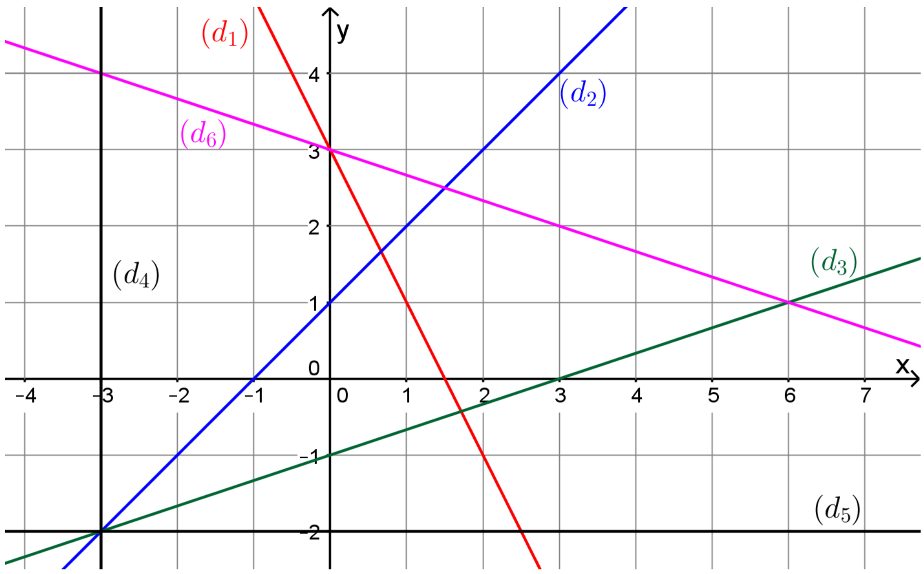
1. Déterminer les images $k(3)$; $g(4)$; $f(-1)$.
2. Résoudre les équations suivantes
   $f(x) = 4$; $f(x) = -2$; $g(x) = -1$.
3. Lire l'*ordonnée à l'origine* de f ;
   puis déterminer son *coefficient directeur*.
4. Faire de même pour les fonctions g, et de h.
5. Construire la *courbe représentative* des fonctions affines k, ℓ, h données par :
   - $k(x) = -4x + 5$;
   - $\ell(x) = 2x - 3$;
   - $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$.
   - $q(x) = x - 2$.



Pour s'exercer

Pour chacune des six fonctions affines représentées ci-contre, déterminer (si possible) :

- l'ordonnée à l'origine
- le coefficient directeur
- l'expression complète.



Savoir-faire n° 3: Déterminer l'expression d'une fonction affine

f est une fonction affine telle que : $f(3) = 5$ et $f(8) = 9$.

On pose par ailleurs $f(x) = ax + b$ et on cherche à déterminer les nombres a et b.

1. **(a)** Calculer le *coefficient directeur* de f à l'aide de la *formule des accroissements*.
   (b) En déduire l'ordonnée à l'origine de f. Écrire enfin l'*expression réduite* de f.
2. Calculer $f(13)$, $f(18)$, $f(-2)$ puis résoudre l'équation $f(x) = -7$.

Pour s'exercer

Reprendre les questions de l'exercice avec a fonction affine g vérifiant :

$g(3) = -4$

et

$g(-2) = 11$.

Exercices et problèmes

Exercice n° 1: Changement d'unités de vitesse

La vitesse d'un Airbus A320 est de $855\,\text{km.h}^{-1}$.

1. **(a)** Convertir cette vitesse en m.s^{-1}. **(b)** Calculer la distance parcourue en $90\,\text{mn}$.

2. Exprimer la distance parcourue d (en km) en fonction du temps de parcourt t (en h).

3. Exprimer la distance parcourue D (en m) en fonction du temps de parcours T (en min).

Exercice n° 2: Facture d'un artisan

Un plombier fait payer à ses clients 40 € de frais de déplacement et 30 € par heure de travail.

1. Quel est le montant de la facture pour 2 h de travail ? pour 2 h30 de travail ?

2. Écrire le montant $D(x)$ de la facture en fonction du nombre x d'heures de travail.

3. **(a)** Représenter la fonction D sur la calculatrice.

(b) Utiliser cette représentation pour déterminer le montant de la facture pour : 3h de travail.

(c) Démontrer la réponse de la question précédente par le calcul.

4. Déterminer le temps de travail correspond à une facture de 55 €. À une facture de 190 €.

Exercice n° 3: Soldes

Pendant les soldes, un commerçant baisse le prix de tous ses articles de $30\,\%$.

1. Un article coûte initialement 27 €. Calculer le montant de la baisse puis le prix réduit de cet article.

2. Exprimer, en fonction du prix x (en euros), le montant $B(x)$ de la baisse (en euros).

3. Exprimer, en fonction du prix x (en euros), le montant $R(x)$ du prix réduit (en euros).

4. Un article est soldé à 45€. Quel était sont prix initial ?

Exercice n° 4: Tarifs de télécommunications

Les tarifs mensuels d'un abonnement pour un téléphone mobile sont les suivants :

⋆ Forfait d'une heure 15 € plus $0,30$ € par minute supplémentaire.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-contre, du coût (montant final de la facture en euros) en fonction de la durée (durée totale des communications du mois en minutes).

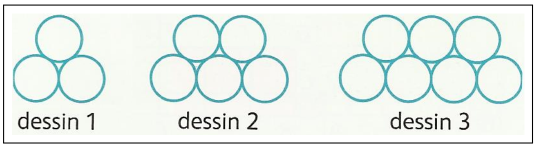
Durée t (en minutes)	45	60	80	120
Coût $C(t)$ (en euros)				

2. Déterminer l'expression de la fonction C.

3. Pour quel temps de communication le coût est-il égal à $52,50$ € ?

Exercice n° 5: Empilement de cercles

Voici, ci-contre, le début d'une succession de dessins de cercles.



1. Combien de cercles seront tracés au dessin 4 ?

2. Combien de cercles seront tracés au dessin 45 ?

3. Combien de cercles seront tracés au dessin n ? (n nombre entier positif quelconque.)

4. Quel est le numéro du dessin qui comportera $6\,515$ cercles ?

Exercice n° 6: Économies

Bob souhaite acheter un lecteur MP3. Le prix affiché (49€) dépasse largement la somme dont il dispose.

Il décide donc d'économiser régulièrement.

Il a relevé qu'il avait 17€ au deuxième mois et 25€ au quatrième mois.

En économisant au même rythme, au bout de combien de mois Bob pourra-t-il acheter le lecteur MP3 ?

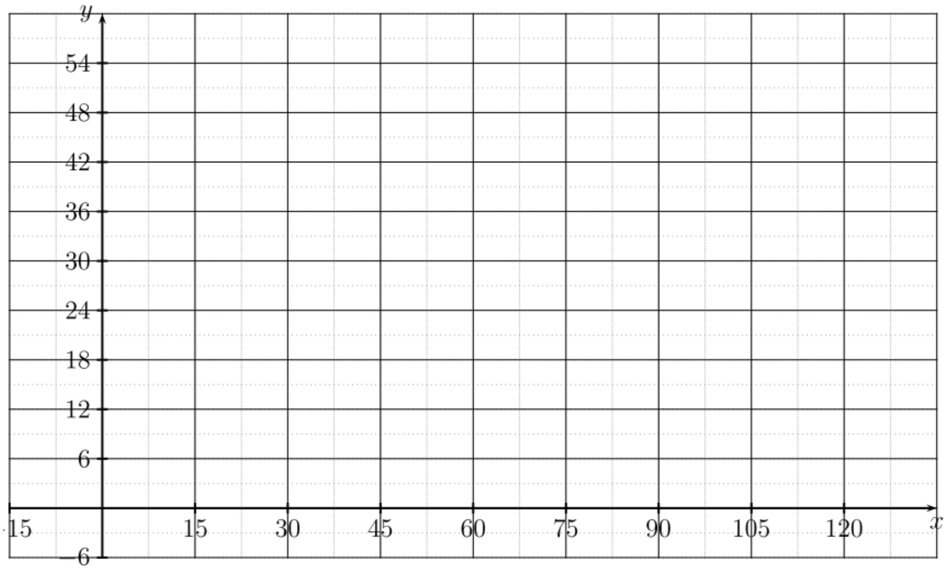
Problème n° 1: Coûts des communications téléphoniques

Bob a relevé les montants de ses factures téléphonique de Juillet à Novembre 2018, ainsi les temps de communication correspondants. On se propose de comprendre comment est calculé le montant de ses factures.

	juillet	août	septembre	octobre	novembre
Temps (en min.)	60	120	90	80	105
Prix (en €)	42	54	48	46	51

Le montant de la facture est fonction du temps de communication. On désigne par P cette fonction qui, au temps t de communication (en min), associe le prix $P(t)$ à payer (en reuros).

1. Dans le repère ci-dessous, placer les points correspondants aux valeurs du tableau précédent.
Que constate-t-on ?



⋆ <u>Pour la suite, on suppose que :</u>
Les accroissements du coût sont *proportionnels* aux accroissements du temps de communication.

2. Compléter le tableau ci-contre, par le calcul.

3.(a) Calculer le coût d'une minute de conversation téléphonique supplémentaire.

(b) Calculer le coût de 75 min de conversation.

accroissement de t: +

t	60	120	90	80	105
$P(t)$	42	54	48	46	51

accroissement de *P(t)*: +

4. Déterminer l'expression $P(t)$ en fonction de t.

5. Quel temps de conversation téléphonique correspond à un coût de 60€.

Problème n° 2: Tarifs de taxis

Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent les tarifs suivants :

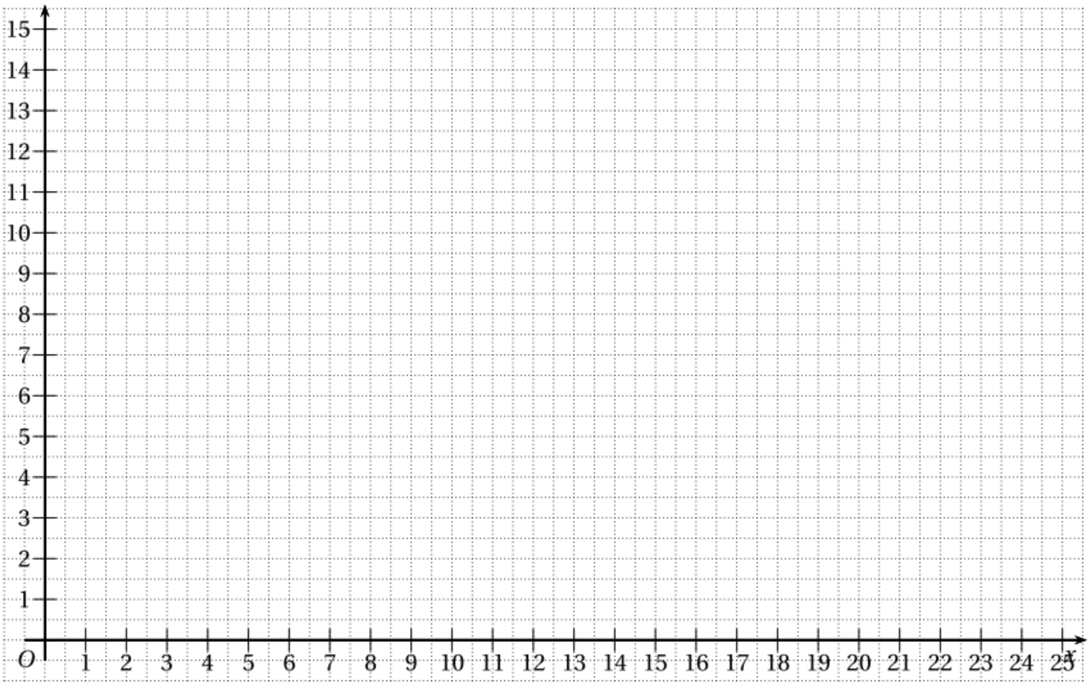
- T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilomètre ;
- T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilomètre ;
- T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilomètre.

1. (a) Quel est le taxi le plus économique pour un trajet de 5 km ? de 10 km ? de 15 km ?

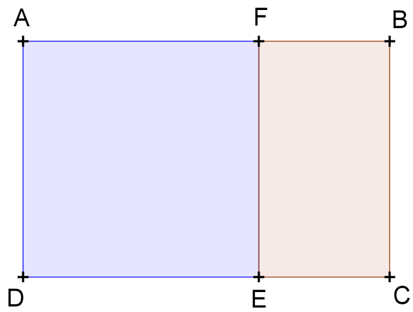
(b) On note x la distance que veut parcourir un client en taxi.
Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.

2. (a) Dans le repère de la page suivante, représenter les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de f_1, f_2 et f_3.

(b) Par lecture graphique, indiquer pour quelle(s) distance(s) il revient au même de prendre le taxi T_1 ou le taxi T_2. Retrouver ce résultat par le calcul.



Problème n° 3: Périmètres d'un carré et d'un rectangle



Sur la figure ci-contre :

- $ABCD$ est un rectangle et $AFED$ est un carré.
- F est placé sur $[AB]$ et E sur $[DC]$.
- On a $BF = 3$ et on pose $AF = x$.

1. **(a)** Calculer le périmètre de $AFED$ lorsque $x = 2$; lorsque $x = 3$.

(b) x est désormais un nombre réel positif quelconque. Exprimer le périmètre de $AFED$ en fonction de x.

(c) Quelle doit être la valeur de x pour que ce périmètre soit 16 ?

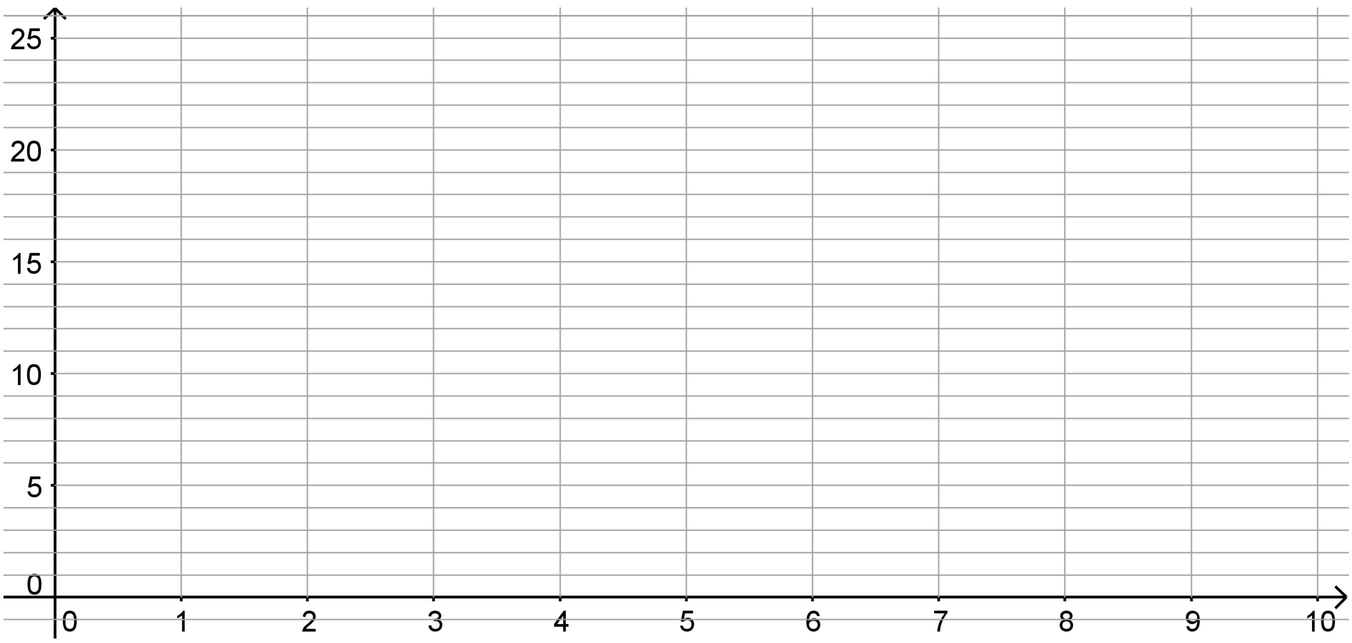
2. **(a)** Exprimer le périmètre de $FBCE$ en fonction de x.

(b) Quelle est l'image de 10 par cette fonction ? **(c)** Quel est l'antécédent de 20 par cette fonction ?

3. Les périmètres de $AFED$ et $FBCE$ peuvent-ils être égaux ? Justifier par un calcul.

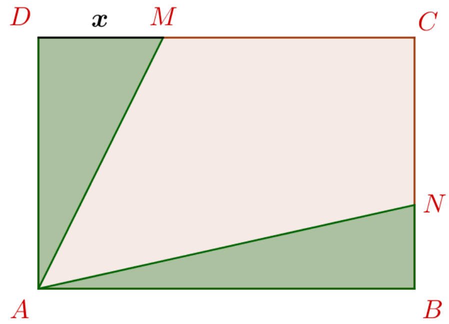
4. **(a)** Dans le repère ci-dessous, construire les courbes représentatives des deux fonctions précédentes.

(b) Répondre à la question **3** par une méthode graphique.



Exercices supplémentaires

Problème n° 4: Triangles et rectangle



- $ABCD$ est un rectangle avec $AB = 9$ et $AD = 6$;
- M est un point du segment $[CD]$.
- N est un point du segment $[BC]$ tel que les aires des triangles ABN et ADM soient égales.

On pose $DM = x$ (x compris entre 0 et 9).

1. Calculer BN lorsque $x = 4,5$.

2. Pour un nombre x compris entre 0 et 9, exprimer BN en fonction de x.

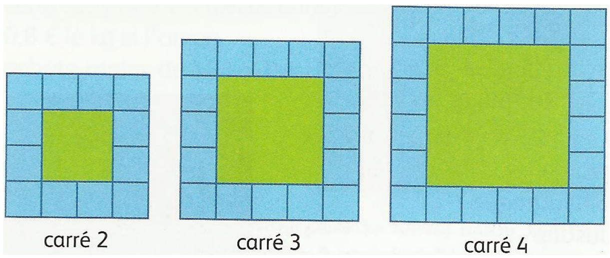
3. On considère :
- la fonction f qui, à x associe l'aire du triangle ADM, lorsque c'est possible ;
- la fonction g qui, à x associe l'aire du quadrilatère $ANCM$, lorsque c'est possible.

(a) Déterminer les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de x les aires de ADM et $ANMC$ sont-elles égales ?

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de $ANMC$ vaut-elle deux fois celle de ADM ?

Exercice n° 7: Carré bordé



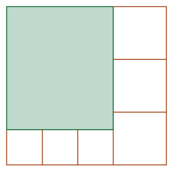
1. Combien y a-t-il de carreaux en bordure des trois carrés centraux ci-contre ?

2. Quel est le nombre de carreaux en bordure du carré central à l'étape n° 6 ?

3. Exprimer le nombre de carreaux en bordure de n'importe quel carré central.

4. Quel est le numéro du carré central dont la bordure est composée de 496 carreaux ?

Exercice n° 8: Prise d'initiative



Le grand carré a été divisé en sept morceaux : six carrés et un rectangle grisé.

L'aire du rectangle grisé est de $168\,\text{cm}^2$.

Quelle est l'aire du grand carré.

Exercice n° 9.

Déterminer la fonction affine f telle que pour tout réel x, $f(f(f(x))) = -\dfrac{x}{8} - \dfrac{7}{4}$.

Exercice n° 10.

Déterminer la fonction affine f telle que $(f(0)?f(1))(f(0)+f(1)) = 12$ et $f(0)+f(1) = 6$.

Exercice n° 11: Alignement de points

1. **(a)** Dans un repère $(O; I; J)$, placer les points $A(3; 5)$, $B(5; 8)$ et $C(8; 13)$.

(b) Les points A, B, C sont-ils alignés ?

2. **(a)** Déterminer la fonction affine f telle que $f(3) = 5$ et $f(5) = 8$.

(b) Valider ou invalider la conjecture de la question **1(a)**.

Exercice n° 12: Algorithme

> Choisir un nombre x
> Ajouter 5 à ce nombre
> Multiplier le résultat par 4
> Ajouter 2

On considère le programme de calcul ci-contre :

1. Appliquer ce programme de calcul à deux nombres de votre choix.

2. Quelle est la fonction qui à x associe le résultat donné par ce programme de calcul ? Est-ce une fonction affine ?

3. Écrivez un algorithme simple permettant l'affichage de $f(x)$ selon la valeur de x.